Trigonometrische Aufgaben.

Herausgegeben

von

Dr. H. Lieber,

Oberlehrer an der Friedrich-Wilhelmsschule (Realschule 1. Ordnung)
in Stettin.

und

F. v. Lühmann,

Oberlehrer am Progymnasium in Gartz a. O.

Mit einer Figurentafel.

Zweite unveränderte Auflage.

Berlin.
Verlag von Leonhard Simion.
1878.

Vorrede.

Vor einiger Zeit hatten wir eine Sammlung geometrischer Constructions-Aufgaben herausgegeben, und waren bei der Anordnung der Aufgaben hauptsächlich von dem Grundsatz ausgegangen, daß dieselben, wenn die Gesammtheit der Schüler im Stande sein soll, sie zu lösen, systematisch behandelt und in bestimmte Gruppen getheilt werden müssen, für welche die Grundzüge der Lösung anzugeben sind. Nur in dies m Fall können die Schüler wirklich in der Lösung von Aufgaben unterrichtet werden. Daher wird eine Aufgabensammlung auch nur dann ihrem Zweck als Unterrichtsbuch entsprechen, wenn sie nach einem strengen System angelegt ist, so daß der danach unterrichtete Schüler bei jeder einzelnen Aufgabe weiß, was er zu thun hat; welche Hülfslinien er bei einer geometrischen Constructions-Aufgabe zu ziehen, welche Formeln er bei Lösung einer trigonometrischen Aufgabe anzuwenden hat.

Von diesem Gesichtspunkt ausgehend haben wir jetzt auch die trigonometrischen Aufgaben, besonders die Dreiecks- und Vierecks-Aufgaben bearbeitet und dabei eine rein analytische Methode angewendet; die Methode auf Grund von geometrischen Constructionen die Aufgaben zu lösen ist ganz übergangen. Von selbst versteht es sich, daß, um die trigonometrische Auflösung anzubahnen, diejenigen Linien, welche unmittelbar gegeben, in der Figur gezogen sein müssen, aber sonst keine Hülfslinien. Befindet sich z. B. ϱ unter den gegebenen Elementen eines Dreiecks, so ist der Radius des eingeschriebenen Kreises zu ziehen; ist aber $a + b$ oder $\varrho_a + \varrho_b$ eins der gegebenen Elemente, so darf bei einer rein analytischen Lösung nicht $a + b$, resp. $\varrho_a + \varrho_b$ wirklich construirt werden, sondern es genügt im letzteren Falle, wenn ϱ_a und ϱ_b gezeichnet werden. Entschieden

ist in didactischer Beziehung die Vermengung beider Methoden zu verwerfen, da sie nur dazu geeignet ist, bei den Schülern Unklarheit hervorzurufen.

Bei der Lösung der Aufgaben selber kommt es unserer Ansicht nach darauf an, zunächst solche Stücke zu berechnen, die sich möglichst leicht und elegant berechnen lassen, und aus denen man dann mittelst einfacher Formeln die übrigen Stücke finden kann. Solche Stücke, die man z. B. bei Dreiecks-Aufgaben immer zu gewinnen suchen muß, sind namentlich die Winkel, da man durch diese und eins der gegebenen Elemente leicht r und so alles übrige berechnen kann. Wir haben alle Stücke (nur bei a, b, h_a, h_b ist dies nicht vortheilhaft) durch r, γ und $\alpha - \beta = \delta$ ausgedrückt, da sich die Formeln so besser zur Rechnung eignen und einen leichteren Ueberblick gewähren. Auch bei allen anderen Aufgaben, selbst den vermischten (4. Abschnitt) haben wir es uns zum Princip gemacht, zunächst immer die unbekannten Winkel zu berechnen, da die resultirenden Formeln in der Regel ungleich einfacher ausfallen, als die, durch welche Linien berechnet werden.

Die Vierecks-Aufgaben sind bisher wenig beliebt gewesen, obgleich sie einen so reichlichen und zweckmäßigen Uebungsstoff bieten. Der Grund liegt offenbar darin, daß die resultirenden Formeln nicht die Eleganz und und äußere Symmetrie zeigten, wie bei den Dreiecks-Aufgaben. Vielleicht ist es uns gelungen, durch eine zweckmäßigere Bezeichnung der von den Seiten und Diagonalen gebildeten Winkel diesem Uebelstande abgeholfen und dieses Gebiet für die trigonometrische Behandlung zugänglicher gemacht zu haben.

Von den goniometrischen Aufgaben sind nur diejenigen aufgenommen, welche für die Aufgaben der anderen Abschnitte gebraucht werden. Viele trigonometrische Aufgaben sind nämlich nur dann elegant zu lösen und bequem logarithmisch zu berechnen, wenn Hülfswinkel eingeführt werden. Wie schwerfällige und ungeschickte Auflösungen man erhält, wenn man diesen Punkt außer Acht läßt, kann man an den trigonometrischen Aufgabensammlungen sehen, welche die Hülfswinkel nur nebensächlich behandeln. Die Schüler müssen daher, bevor sie trigonometrische Aufgaben lösen, in der Einführung und Behandlung der Hülfswinkel, sowie in der Lösung goniometrischer Aufgaben geübt werden. Zur Erreichung dieses Zweckes dienen die Aufgaben des ersten Abschnittes; sie werden sämmtlich mehr oder weniger bei den Aufgaben der folgenden Abschnitte gebraucht.

Zur Benutzung dieses Buches beim Unterricht dürfte es sich empfehlen, zunächst die Aufgaben des §. 11 zu behandeln und dann zur Vorbereitung für das Folgende die wichtigsten Aufgaben des ersten Abschnittes einzuüben; es wären dies namentlich folgende: §. **3**, 1 und 2; §. **4**, 1, 13, 14;

§. **6**, 1, 7, 9; §. **7**, 1 und 7; §. **9**, 3. Sind diese Aufgaben den Schülern sicher eingeprägt, so werden dieselben schon im Stande sein, die meisten übrigen Aufgaben dieses Abschnittes bei einer etwaigen Anwendung in späteren Abschnitten durch eine ähnliche Behandlung selbständig zu lösen. Die schwierigeren Aufgaben, wie §. **3**, 3 bis 6 und §. **9**, 5 bis 11 brauchten wohl erst dann durchgenommen zu werden, wenn eine der späteren Aufgaben auf dieselben führt.

Bei den Aufgaben aus der angewandten Trigonometrie sind folgende Bücher benutzt: Dr. Ad. Poppe, ebene Trigonometrie in Anwendung auf Distanz- und Höhenmessungen. J. Helmes, die ebene Trigonometrie. Dr. Carl Hechel, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. K. H. Schellbach, mathematische Aufgaben.

Die Tafel der pythagoräischen Dreiecke ist die von Bretschneider im ersten Theil von Grunert's Archiv veröffentlichte; jedoch ist in derselben das Versehen in No. 77, welches sich von da in mehrere Aufgabensammlungen und Lehrbücher der Trigonometrie eingeschlichen hat, berichtigt. Die zweite Tafel enthält numerische Werthe für die am häufigsten vorkommenden Dreiecksstücke, welche an Stelle der Zahlenbeispiele treten können. Dieselbe dürfte den Lehrern der Mathematik erwünscht sein, da, soviel uns bekannt, in den vorhandenen Tafeln außer den Seiten und Winkeln nur eine Höhe, die durch dieselbe gebildeten Abschnitte, die Radien des um- und des eingeschriebenen Kreises und der Inhalt berechnet sind.

Stettin und Gartz a. Oder im April 1874.

Inhalts-Verzeichniß.

I. Abschnitt.

Goniometrische Hülfsmittel.

II. Abschnitt.

Dreiecks-Aufgaben.

Bezeichnungen.

1. **Rechtwinkliges Dreieck.** $R \triangle ABC$, der rechte Winkel bei C; Katheten a und b; Hypotenuse c; α und β Gegenwinkel von a und b; Höhe h; die durch h auf c gebildeten Abschnitte sind p und q; p liegt an a, q an b.
2. **Gleichschenkliges Dreieck.** Schenkel a; Grundlinie b; Basiswinkel α; Winkel an der Spitze 2β; h_b die auf die Grundseite gefällte Höhe; p und q sind die von der Höhe h_a auf a gebildeten Abschnitte, q liegt an b; u und v sind die von der Halbirungslinie w_a des Winkels α auf dem Schenkel a gebildeten Abschnitte, v liegt an b; t_a ist die von dem Endpunkt der Grundseite nach der Mitte von a gezogene Transversale; ρ ist der Radius des inneren Berührungskreises; ρ_b der Radius des zur Grundseite gehörenden äußeren Berührungskreises.
3. **Allgemeines Dreieck.** $\triangle ABC$.

   α Winkel bei A, a Gegenseite von α $(a > b)$.

   β Winkel bei B, b Gegenseite von β.

   γ Winkel bei C, c Gegenseite von γ.

   h_a die von A auf a gefällte Höhe.

   h_b die von B auf b gefällte Höhe.

   h_c die von C auf c gefällte Höhe.

   t_a die von A nach der Mitte von a gezogene Transversale.

   t_b die von B nach der Mitte von b gezogene Transversale.

   t_c die von C nach der Mitte von c gezogene Transversale.

   Wenn AD, BE und CF die Seiten halbirenden Transversalen, also resp. t_a, t_b, t_c sind, welche sich in S schneiden, so bezeichnen wir $\angle DAB = \alpha_1$, $DAC = \alpha_2$, $\angle EBC = \beta_1$, $\angle EBA = \beta_2$, $\angle ACF = \gamma_1$, $\angle BCF = \gamma_2$, $\angle AFC = \varepsilon$.

   w_a Halbirungslinie des Winkels α.

   w_b Halbirungslinie des Winkels β.

   w_c Halbirungslinie des Winkels γ.

   r Radius des umgeschriebenen Kreises.

   ρ Radius des eingeschriebenen Kreises.

   ρ_a Radius des zur Seite a gehörenden äußeren Berührungskreises.

ρ_b Radius des zur Seite b gehörenden äußeren Berührungskreises.
ρ_c Radius des zur Seite c gehörenden äußeren Berührungskreises.
p und q sind die von h_c auf c gebildeten Abschnitte; p liegt an a, q an b.
u und v sind die von w_c auf c gebildeten Abschnitte; u liegt an a, v an b.
$\triangle$ Inhalt des Dreiecks.
$\angle$ (t_a b) ist der von t_a und b gebildete Winkel.

4. Rhombus ABCD. Seite a, spitze Winkel α, größere Diagonale e, kleinere Diagonale f, Inhalt F.
5. Rhomboid. (Ungleichseitiges Parallelogramm.) ABCD. Seite AB = DC = a, AD = BC = b, Diagonale AC = e, BD = f, ihr Durchschnittspunkt E, Winkel BAD = α, ADB = α', ACB = α'', DCA = β', DBA = β'', AEB = ε, Inhalt F.
6. Antiparallelogramm ABCD. Größere Parallele AB = a, kleinere Parallele DC = c, Seite AD = BC = b, Diagonale AC = BD = e, ihr Durchschnittspunkt E, Winkel DAB = α, ADB = ACB = α', BAC = BDC = DBA = DCA = β', DAC = DBC = γ', AEB = ε, Inhalt F.
7. Trapez ABCD. Größere Parallele AB = a, kleinere Parallele DC = c, Seite BC = b, AD = d, Diagonale AC = e, BD = f, ihr Durchschnittspunkt E, Winkel DAB = α, ABC = β, ADB = α', ACB = α'', BAC = DCA = β', BDC = DBA = β'', CBD = γ', CAD = γ'', AEB = ε, Inhalt F.
8. Sehnenviereck ABCD. Seite AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, Diagonale AC = e, BD = f, ihr Durchschnittspunkt E, Winkel DAB = α, ABC = β, BCD = $\pi - \alpha = \gamma$, CDA = $\pi - \beta = \delta$, ADB = ACB = α', BAC = BDC = β', CBD = CAD = γ', DCA = DBA = δ', AEB = ε, Inhalt F.
9. Allgemeines Viereck ABCD. Seite AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, Diagonale AC = e, BD = f, ihr Durchschnittspunkt E, Winkel DAB = α, ABC = β, BCD = γ, CDA = δ, ADB = α', ACB = α'', BAC = β', BDC = β'', CBD = γ', CAD = γ'', DCA = δ', DBA = δ'', AEB = ε, Inhalt F.
10. Tangenten-Trapez wie Trapez.
11. Tangenten-Antiparallelogramm wie Antiparallelogramm.
12. Tangenten-Viereck wie allgemeines Viereck.
13. P, P′, ... bezeichnen Punkte.
14. L, L′, ... bezeichnen Linien.
15. K, K′, ... bezeichnen Kreise resp. mit den Radien r, r′, ...

Erster Abschnitt.

Goniometrische Hülfsmittel.

---

§. 1.

Trigonometrische Functionen der Winkel ausgedrückt durch andere trigonometrische Functionen.

a) Functionen der Winkel ausgedrückt durch andere Functionen derselben Winkel.

1. $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos\alpha^2}$

2. $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\alpha^2}}$

3. $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot\alpha^2}}$

4. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin\alpha^2}$

5. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\alpha^2}}$

6. $\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1 + \cot\alpha^2}}$

7. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin\alpha^2}}$

8. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos\alpha^2}}{\cos\alpha}$

9. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$

10. $\cot\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin\alpha^2}}{\sin\alpha}$

11. $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos\alpha^2}}$

12. $\cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

b) Functionen der Winkel ausgedrückt durch Functionen der halben Winkel.

13. $\sin\alpha = 2\sin{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\alpha$

14. $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}{}^1/_2\alpha}{1 + \operatorname{tg}{}^1/_2\alpha^2}$

15. $\sin\alpha = \frac{2\cot{}^1/_2\alpha}{1 + \cot{}^1/_2\alpha^2}$

16. $\cos\alpha = \cos{}^1/_2\alpha^2 - \sin{}^1/_2\alpha^2$

17. $\cos\alpha = 1 - 2\sin{}^1/_2\alpha^2$

18. $\cos\alpha = 2\cos{}^1/_2\alpha^2 - 1$

19. $\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}{}^1/_2\alpha^2}{1 + \operatorname{tg}{}^1/_2\alpha^2}$

20. $\cos\alpha = \frac{\cot{}^1/_2\alpha^2 - 1}{\cot{}^1/_2\alpha^2 + 1}$

21. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\alpha}{\cos{}^1/_2\alpha^2 - \sin{}^1/_2\alpha^2}$

22. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\alpha}{1 - 2\sin{}^1/_2\alpha^2}$

23. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\alpha}{2\cos{}^1/_2\alpha^2 - 1}$

24. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}{}^1/_2\alpha}{1 - \operatorname{tg}{}^1/_2\alpha^2}$

25. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\cot{}^1/_2\alpha}{\cot{}^1/_2\alpha^2 - 1}$

26. $\cot\alpha = \frac{\cos{}^1/_2\alpha^2 - \sin{}^1/_2\alpha^2}{2\sin{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\alpha}$

27. $\cot\alpha = \frac{1 - 2\sin{}^1/_2\alpha^2}{2\sin{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\alpha}$

28. $\cot\alpha = \frac{2\cos{}^1/_2\alpha^2 - 1}{2\sin{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\alpha}$

29. $\cot\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}{}^1/_2\alpha^2}{2\operatorname{tg}{}^1/_2\alpha}$

30. $\cot\alpha = \frac{\cot{}^1/_2\alpha^2 - 1}{2\cot{}^1/_2\alpha}$

c) Functionen der halben Winkel ausgedrückt durch Functionen der ganzen Winkel.

31. $\sin{}^1/_2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}$

32. $\sin{}^1/_2\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

33. $\cos{}^1/_2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}$

34. $\cos{}^1/_2\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

35. $\operatorname{tg}{}^1/_2\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

§. 2.

Relationen zwischen den Functionen von Winkeln, deren Summe noch eine Bedingung erfüllen soll.

a) In den folgenden Aufgaben sind 3 Winkel α, β, γ gegeben, deren Summe $= \pi$.

1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\left(\cos{}^1/_2(\alpha-\beta) + \cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\right) = 4\cos{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\beta\cos{}^1/_2\gamma.$

2) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta\cos{}^1/_2\gamma.$

3) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 = 2\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2(\alpha-\beta) - 2\sin{}^1/_2\gamma^2 = 2\sin{}^1/_2\gamma\left(\cos{}^1/_2(\alpha-\beta) - \cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\right) = 4\sin{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta\sin{}^1/_2\gamma.$

4) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma + 1 = 4\cos{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\beta\sin{}^1/_2\gamma.$

5) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\beta\cos\beta - 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = 4(\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta^2 + 2\sin\alpha^2\sin\beta\cos\beta) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

6) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$

7) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1 = 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos\gamma^2 = 2\cos(\alpha+\beta)\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\} = -4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

8) $\cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma + 1 = 4\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

9) $\sin{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta\cos{}^1/_2\gamma + \sin{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\beta\sin{}^1/_2\gamma + \cos{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta\sin{}^1/_2\gamma = \sin{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2(\beta+\gamma) + \cos{}^1/_2\alpha$

$\sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma = \cos \frac{1}{2}\alpha \{\cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) + \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma\}$
$= \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma.$

10. $\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma + \cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma - \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma = 1.$
11. $\cos\alpha \cos\beta \sin\gamma + \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma + \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$
12. $\cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma + \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 1.$
13. $\cot \frac{1}{2}\alpha + \cot \frac{1}{2}\beta + \cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta} + \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma (\sin \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} = \cot \frac{1}{2}\alpha \cot \frac{1}{2}\beta \cot \frac{1}{2}\gamma.$
14. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$
15. $\sin(4n+1)\alpha + \sin(4n+1)\beta + \sin(4n+1)\gamma = 2\sin \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta)\cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha-\beta) + \sin(4n+1)(\pi - (\alpha+\beta)) = 2\sin \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha-\beta) + \sin(4n+1)(\alpha+\beta) = 2\sin \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta)\{\cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha-\beta) + \cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta)\} = 4\cos \frac{1}{2}(4n+1)\alpha \cos \frac{1}{2}(4n+1)\beta \cos \frac{1}{2}(4n+1)\gamma.$
16. $\sin(4n+2)\alpha + \sin(4n+2)\beta + \sin(4n+2)\gamma = 4\sin(2n+1)\alpha \sin(2n+1)\beta \sin(2n+1)\gamma.$ Aehnlich wie 15.
17. $\sin(4n+3)\alpha + \sin(4n+3)\beta + \sin(4n+3)\gamma = -4\cos \frac{1}{2}(4n+3)\alpha \cos \frac{1}{2}(4n+3)\beta \cos \frac{1}{2}(4n+3)\gamma.$
18. $\sin 4n\alpha + \sin 4n\beta + \sin 4n\gamma = -4\sin 2n\alpha \sin 2n\beta \sin 2n\gamma.$
19. $\cos(4n+1)\alpha + \cos(4n+1)\beta + \cos(4n+1)\gamma = 2\cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta)\cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha-\beta) - \cos(4n+1)(\alpha+\beta) = 2\cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha-\beta) + 1 - 2\cos \frac{1}{2}(4n+1)(\alpha+\beta)^2 = 1 + 4\sin \frac{1}{2}(4n+1)\alpha \sin \frac{1}{2}(4n+1)\beta \sin \frac{1}{2}(4n+1)\gamma.$
20. $\cos(4n+2)\alpha + \cos(4n+2)\beta + \cos(4n+2)\gamma = 1 - 4\cos \frac{1}{2}(4n+2)\alpha \cos \frac{1}{2}(4n+2)\beta \cos \frac{1}{2}(4n+2)\gamma.$
21. $\cos(4n+3)\alpha + \cos(4n+3)\beta + \cos(4n+3)\gamma = 1 - 4\sin \frac{1}{2}(4n+3)\alpha \sin \frac{1}{2}(4n+3)\beta \sin \frac{1}{2}(4n+3)\gamma.$
22. $\cos 4n\alpha + \cos 4n\beta + \cos 4n\gamma = 1 + 4\cos 2n\alpha \cos 2n\beta \cos 2n\gamma.$

b) In den folgenden Aufgaben sind 4 Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gegeben, deren Summe $= 0$.

23. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = 2\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2(\alpha-\beta) + 2\sin{}^1/_2(\gamma+\delta)\cos{}^1/_2(\gamma-\delta) = 2\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\{\cos{}^1/_2(\alpha-\beta) - \cos{}^1/_2(\gamma-\delta)\} = 4\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\sin{}^1/_4(\gamma-\delta-\alpha+\beta)\sin{}^1/_4(\alpha-\beta+\gamma-\delta) = 4\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\sin{}^1/_2(\beta+\gamma)\sin{}^1/_2(\alpha+\gamma)$; mithin allgemein, welche Werthe auch α, β, γ haben mögen, $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\sin{}^1/_2(\beta+\gamma)\sin{}^1/_2(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\gamma)$ (F).

Anmerk. Aus dieser Formel (F) lassen sich nun mehrere der vorhergehenden Formeln durch einfache Substitutionen ableiten; wenn nämlich angenommen wird, daß $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ist.

α) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\beta\cos{}^1/_2\gamma$, also (1).

β) In (F) $-\gamma$ für γ gesetzt, giebt $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\sin{}^1/_2(\beta-\gamma)\sin{}^1/_2(\alpha-\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) = 4\cos{}^1/_2\gamma\sin{}^1/_2(\beta-\gamma)\sin{}^1/_2(\alpha-\gamma) + \sin 2\gamma = 2\cos{}^1/_2\gamma\{\cos{}^1/_2(\alpha-\beta) - \sin{}^3/_2\gamma\} + \sin 2\gamma = 2\cos{}^1/_2\gamma\cos{}^1/_2(\alpha-\beta) - \sin 2\gamma - \sin\gamma + \sin 2\gamma = 2\cos{}^1/_2\gamma\{\cos{}^1/_2(\alpha-\beta) - \cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\} = 4\sin{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta\cos{}^1/_2\gamma$, also (2).

γ) 2α für α, 2β für β und 2γ für γ in F eingesetzt, giebt $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, also (5).

δ) 2α für α, 2β für β und -2γ für γ in F eingesetzt, giebt ähnlich wie in β: $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$, also (6).

ε) $4n\alpha$ für α, $4n\beta$ für β und $4n\gamma$ für γ in F eingesetzt, giebt: $\sin 4n\alpha + \sin 4n\beta + \sin 4n\gamma = -4\sin 2n\alpha\sin 2n\beta\sin 2n\gamma$.

Auch die Substitutionen $(4n+1)\alpha$, $(4n+2)\alpha$, $(4n+3)\alpha$ u. s. w. für α, β, γ in Formel (F) geben resp. (15), (16), (17).

24) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta = 2\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\{\cos{}^1/_2(\alpha-\beta) + \cos{}^1/_2(\gamma-\delta)\} = 4\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_4(\alpha-\beta+\gamma-\delta)\cos{}^1/_4(\alpha-\beta-\gamma+\delta) = 4\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2(\alpha+\gamma)\cos{}^1/_2(\beta+\gamma)$; also $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2(\alpha+\gamma)\cos{}^1/_2(\beta+\gamma) - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$ (G).

Anmerk. Aus Formel (G) lassen sich nun ähnlich wie in 23, unter der Voraussetzung, daß $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, die früheren Formeln 3, 4, 7, 8, 19, 20, 21, 22 herleiten.

§. 3.

Anwendung der Hülfswinkel bei der Berechnung von Ausdrücken und der Lösung von Gleichungen.

1. φ zu berechnen aus $a\sin\varphi + b\cos\varphi = c$. 1. Aufl. Wird $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\psi$ gesetzt, so ergiebt sich $\sin\varphi + \operatorname{tg}\psi\cos\varphi = \frac{c}{a}$ und

hieraus $\sin(\varphi + \psi) = \frac{c \cos \psi}{a} = \frac{c \sin \psi}{b}$; letzterer Ausdruck liefert für $\psi > \frac{1}{4}\pi$, ersterer für $\psi < \frac{1}{4}\pi$ eine genauere numerische Berechnung. 2. Aufl. $\sin \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi^2}$ und $\cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi^2}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi^2}$; mithin $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{2a}{b+c} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi + \frac{c-b}{c+b} = 0$. Die Berechnung von φ nach dieser Formel ist einfacher, wenn b und c Summen und Differenzen derselben Größen sind.

2. x zu berechnen aus $x = a \sin \alpha + b \cos \alpha$. Aufl. $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt, giebt $x = a(\sin \alpha + \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha)$ oder $x = \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} = \frac{b \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \varphi}$.

φ und ψ zu berechnen aus

3. $a \sin \varphi + b \sin \psi = c$ und $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\varphi - \psi = 2\delta$ gesetzt, giebt $\varphi = \sigma + \delta$ und $\psi = \sigma - \delta$, mithin $a \sin(\sigma + \delta) + b \sin(\sigma - \delta) = c$, und $(a + b) \sin \sigma \cos \delta + (a - b) \cos \sigma \sin \delta = c$, also δ nach 1) zu berechnen.
4. $a \sin \varphi + b \sin \psi = c$ und $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. ähnlich wie 3.
5. $a \cos \varphi + b \cos \psi = c$ und $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\varphi - \psi = 2\delta$ gesetzt, giebt $a \cos(\sigma + \delta) + b \cos(\sigma - \delta) = c$, also $(a + b) \cos \sigma \cos \delta - (a - b) \sin \sigma \sin \delta = c$, woraus δ nach 1) zu berechnen.
6. $a \cos \varphi + b \cos \psi = c$ und $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. ähnlich wie 5.
7. $\frac{a+b}{a-b}$ mittelst eines Hülfswinkels zu berechnen, wenn a und b Producte sind. Aufl. Es ist $\frac{a+b}{a-b} = \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}}$. Setzen wir nun

a) $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, so ist $\frac{a+b}{a-b} = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2} \cos(\frac{1}{4}\pi - \varphi)}{\sqrt{2} \sin(\frac{1}{4}\pi - \varphi)} = \cot(\frac{1}{4}\pi - \varphi) = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \varphi)$. b) $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi^2$ gesetzt, giebt $\frac{a+b}{a-b} = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi^2}{1 - \operatorname{tg} \varphi^2} = \frac{\cos \varphi^2 + \sin \varphi^2}{\cos \varphi^2 - \sin \varphi^2} = \frac{1}{\cos 2\varphi}$. c) $\frac{b}{a} = \cos \varphi$ gesetzt, wenn $b < a$, giebt $\frac{a+b}{a-b} = \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}\varphi^2}{2 \sin \frac{1}{2}\varphi^2} = \cot \frac{1}{2}\varphi^2$.

8. $\sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b}$ mittelst eines Hülfswinkels zu berechnen. Aufl. $\sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b} = \sqrt{a}\left(\sqrt{1+\frac{b}{a}} \pm \sqrt{1-\frac{b}{a}}\right)$; $\frac{b}{a} = \cos\varphi$ gesetzt, giebt $\sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b} = \sqrt{a}\left(\sqrt{1+\cos\varphi} \pm \sqrt{1-\cos\varphi}\right) = \sqrt{2a}\,(\cos {}^1\!/_2\varphi \pm \sin {}^1\!/_2\varphi)$; mithin a) $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} = 2\sqrt{a}\,\cos({}^1\!/_2\varphi - {}^1\!/_4\pi)$ und b) $\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} = 2\sqrt{a}\,\sin({}^1\!/_4\pi - {}^1\!/_2\varphi)$.

9. φ zu berechnen aus $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{a - b\operatorname{tg}\alpha}{a + b\cot\alpha}}$. Aufl. $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{\sin\alpha\,(a\cos\alpha - b\sin\alpha)}{\cos\alpha\,(a\sin\alpha + b\cos\alpha)}} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\sqrt{\frac{\cos\alpha - \frac{b}{a}\sin\alpha}{\sin\alpha + \frac{b}{a}\cos\alpha}}$; $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\psi$ gesetzt, giebt $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\sqrt{\frac{\cos(\alpha+\psi)}{\sin(\alpha+\psi)}} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cot(\alpha+\psi)}$.

10. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ durch Einführung eines Hülfswinkels zur logarithmischen Rechnung geeignet zu machen. 1. Aufl. $c = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab\sin{}^1\!/_2\gamma^2} = (a-b)\sqrt{1 + \frac{4ab\sin{}^1\!/_2\gamma^2}{(a-b)^2}}$, und wenn $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin{}^1\!/_2\gamma\sqrt{ab}}{a-b}$ gesetzt wird, so ist $c = (a-b)\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2} = \frac{a-b}{\cos\varphi}$. 2. Aufl. $a^2 + b^2 = {}^1\!/_2(a+b)^2 + {}^1\!/_2(a-b)^2$; $2ab = {}^1\!/_2(a+b)^2 - {}^1\!/_2(a-b)^2$. Dies eingesetzt, giebt $c = \sqrt{(a+b)^2\sin{}^1\!/_2\gamma^2 + (a-b)^2\cos{}^1\!/_2\gamma^2} = (a-b)\cos{}^1\!/_2\gamma\sqrt{1 + \left\{\frac{(a+b)\operatorname{tg}{}^1\!/_2\gamma}{a-b}\right\}^2}$; und wenn $\frac{(a+b)\operatorname{tg}{}^1\!/_2\gamma}{a-b} = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt wird, so ist $c = \frac{(a-b)\cos{}^1\!/_2\gamma}{\cos\varphi}$.

§. 4.

Die Winkel φ und ψ zu berechnen, wenn die Summe oder Differenz ihrer Sinus, Cosinus, Tangenten oder Cotangenten, und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist.

a) In den folgenden Aufgaben ist die Summe oder Differenz zweier Sinus oder zweier Cosinus gegeben; dieselben sind einfach dadurch zu lösen, daß noch die Differenz oder Summe der halben Winkel berechnet wird.

1. $\sin\varphi + \sin\psi = s;\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{s}{2\sin\sigma}$.

2. $\sin\varphi + \sin\psi = s;\ \varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{s}{2\cos\delta}$.

3. $\sin\varphi - \sin\psi = d;\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{d}{2\cos\sigma}$.

4. $\sin\varphi - \sin\psi = d;\ \varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{d}{2\sin\delta}$.

5. $\cos\varphi + \cos\psi = s;\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{s}{2\cos\sigma}$.

6. $\cos\varphi + \cos\psi = s;\ \varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{s}{2\cos\delta}$.

7. $\cos\varphi - \cos\psi = d;\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \frac{d}{2\sin\sigma}$.

8. $\cos\varphi - \cos\psi = d;\ \varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = -\frac{d}{2\sin\delta}$.

b) In den folgenden Aufgaben ist die Summe oder Differenz eines Sinus und eines Cosinus gegeben; dieselben sind dadurch, daß für den Cosinus ein Sinus gesetzt wird, auf die Aufgaben 1 bis 4 zurückzuführen.

9. $\sin\varphi + \cos\psi = s,\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin\varphi + \sin(\frac{1}{2}\pi - \psi) = s$; da $\varphi - (\frac{1}{2}\pi - \psi) = 2\sigma - \frac{1}{2}\pi$, so ist $2\sin\left(\frac{1}{2}(\varphi - \psi) + \frac{1}{4}\pi\right)$ $\cos(\sigma - \frac{1}{4}\pi) = s$; mithin $\sin\left(\frac{1}{2}(\varphi - \psi) + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{s}{2\cos(\sigma - \frac{1}{4}\pi)}$.

10. $\sin\varphi + \cos\psi = s,\ \varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\varphi + (\frac{1}{2}\pi - \psi) = 2\delta + \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, giebt $\cos\left(\frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{s}{2\sin(\delta + \frac{1}{4}\pi)}$.

11. $\sin\varphi - \cos\psi = d;\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\varphi - (\frac{1}{2}\pi - \psi) = 2\sigma - \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, giebt $\cos\left(\frac{1}{2}(\varphi - \psi) + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{d}{2\sin(\sigma - \frac{1}{4}\pi)}$.

12. $\sin\varphi - \cos\psi = d;\ \varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\varphi + (\frac{1}{2}\pi - \psi) = \frac{1}{2}\pi + 2\delta$ gesetzt, giebt $\sin\left(\frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{d}{2\cos(\delta + \frac{1}{4}\pi)}$.

c) In den folgenden Aufgaben ist die Summe oder Differenz von Tangenten und Cotangenten gegeben; dieselben sind dadurch zu lösen, daß man die Tangente oder Cotangente durch Sinus und Cosinus ausdrückt. In allen Aufgaben ist $\varphi - \psi$ resp. $\varphi + \psi$ nach §. 3, 1 oder 2 zu berechnen.

13. $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = s,\ \varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\frac{\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi}{\cos\varphi\ \cos\psi} = s$, oder $\frac{2\sin(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi)} = s$ oder $s\cos(\varphi - \psi) = 2\sin 2\sigma - s\cos 2\sigma$.

14. $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = s$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $2 \sin(\varphi + \psi) - s \cos(\varphi + \psi) = s \cos 2\delta$.
15. $\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = d$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $2 \sin(\varphi - \psi) - d \cos(\varphi - \psi) = d \cos 2\sigma$.
16. $\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = d$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $d \cos(\varphi + \psi) = 2 \sin 2\delta - d \cos 2\delta$.
17. $\cot\varphi + \cot\psi = s$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $s \cos(\varphi - \psi) = 2 \sin 2\sigma + s \cos 2\sigma$.
18. $\cot\varphi + \cot\psi = s$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $2 \sin(\varphi + \psi) + s \cos(\varphi + \psi) = s \cos 2\delta$.
19. $\cot\varphi - \cot\psi = d$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $d \cos(\psi - \varphi) - 2 \sin(\psi - \varphi) = d \cos 2\sigma$.
20. $\cot\varphi - \cot\psi = d$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $d \cos(\varphi + \psi) = 2 \sin 2\delta + d \cos 2\delta$.
21. $\operatorname{tg}\varphi + \cot\psi = s$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $s \sin(\varphi - \psi) + 2 \cos(\varphi - \psi) = s \sin 2\sigma$.
22. $\operatorname{tg}\varphi + \cot\psi = s$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $s \sin(\varphi + \psi) = s \sin 2\delta + 2 \cos 2\delta$.
23. $\operatorname{tg}\varphi - \cot\psi = d$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $d \sin(\varphi - \psi) = d \sin 2\sigma + 2 \cos 2\sigma$.
24. $\operatorname{tg}\varphi - \cot\psi = d$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $d \sin(\varphi + \psi) + 2 \cos(\varphi + \psi) = d \sin 2\delta$.

§. 5.

Die Winkel φ und ψ zu berechnen, wenn die Summe oder Differenz der Quadrate ihrer Sinus oder Cosinus, und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist.

1. $\sin\varphi^2 + \sin\psi^2 = s$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $2 \sin\varphi^2 + 2 \sin\psi^2 = 2s$ oder $1 - \cos 2\varphi + 1 - \cos 2\psi = 2s$ oder $\cos 2\varphi + \cos 2\psi = 2(1 - s)$ oder $\cos(\varphi - \psi) = \frac{1 - s}{\cos 2\sigma}$.
2. $\sin\varphi^2 + \sin\psi^2 = s$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi = \psi) = \frac{1 - s}{\cos 2\delta}$.
3. $\sin\varphi^2 - \sin\psi^2 = d$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin(\varphi - \psi) = \frac{d}{\sin 2\sigma}$.
4. $\sin\varphi^2 - \sin\psi^2 = d$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin(\varphi + \psi) = \frac{d}{\sin 2\delta}$.
5. $\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 = s$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos(\varphi - \psi) = \frac{s - 1}{\cos 2\sigma}$.
6. $\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 = s$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = \frac{s - 1}{\cos 2\delta}$.

7. $\cos\varphi^2 - \cos\psi^2 = d$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin(\psi - \varphi) = \frac{d}{\sin 2\sigma}$.

8. $\cos\varphi^2 - \cos\psi^2 = d$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin(\varphi + \psi) = -\frac{d}{\sin 2\delta}$.

9. $\sin\varphi^2 + \cos\psi^2 = s$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin(\varphi - \psi) = \frac{s-1}{\sin 2\sigma}$.

10. $\sin\varphi^2 + \cos\psi^2 = s$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin(\varphi + \psi) = \frac{s-1}{\sin 2\delta}$.

11. $\sin\varphi^2 - \cos\psi^2 = d$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos(\varphi - \psi) = -\frac{d}{\cos 2\sigma}$.

12. $\sin\varphi^2 - \cos\psi^2 = d$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = -\frac{d}{\cos 2\delta}$.

§. 6.

Die Winkel φ und ψ zu berechnen, wenn die Producte ihrer Sinus, Cosinus, Tangenten oder Cotangenten, und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist.

1. $\sin\varphi \sin\psi = p$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi) = 2p$ oder $\cos(\varphi - \psi) = 2p + \cos 2\sigma$.

2. $\sin\varphi \sin\psi = p$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = \cos 2\delta - 2p$.

3. $\sin\varphi \cos\psi = p$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin(\varphi - \psi) = 2p - \sin 2\sigma$.

4. $\sin\varphi \cos\psi = p$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin(\varphi + \psi) = 2p - \sin 2\delta$.

5. $\cos\varphi \cos\psi = p$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos(\varphi - \psi) = 2p - \cos 2\sigma$.

6. $\cos\varphi \cos\psi = p$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = 2p - \cos 2\delta$.

7. $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = p$ oder $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cot\psi} = p$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\frac{2\sin\varphi\sin\psi}{2\cos\varphi\cos\psi} = p$ oder $\frac{\cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi)} = \frac{1}{p}$, mithin $\frac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos(\varphi + \psi)} = \frac{1+p}{1-p}$ oder $\cos(\varphi - \psi) = \frac{1+p}{1-p}\cos 2\sigma$.

8. $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = p$ oder $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cot\psi} = p$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = \frac{1-p}{1+p}\cos 2\delta$.

9. $\operatorname{tg}\varphi \cot\psi = p$ oder $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi} = p$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\sin(\varphi - \psi) = \frac{p-1}{p+1} \sin 2\sigma$.

10. $\operatorname{tg}\varphi \cot\psi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi} = p$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\sin(\varphi + \psi) = \frac{p+1}{p-1} \sin 2\delta$.

11. $\cot\varphi \cot\psi = \frac{\cot\varphi}{\operatorname{tg}\psi} = p$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\cos(\varphi - \psi) = \frac{p+1}{p-1} \cos 2\sigma$.

12. $\cot\varphi \cot\psi = \frac{\cot\varphi}{\operatorname{tg}\psi} = p$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = \frac{p-1}{p+1} \cos 2\delta$.

§. 7.

Die Winkel φ und ψ zu berechnen, wenn der Quotient ihrer Sinus oder Cosinus, und die Summe oder Differenz der Winkel gegeben ist.

1. $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = q$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{q+1}{q-1}$, also $\frac{\operatorname{tg}\sigma}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \psi)} = \frac{q+1}{q-1}$, und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{q-1}{q+1} \operatorname{tg}\sigma$.

Ist q ein zusammengesetzter Ausdruck, so kann $\frac{1}{q} = \operatorname{tg}\lambda$ gesetzt werden, dann ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{1 - \operatorname{tg}\lambda}{1 + \operatorname{tg}\lambda} \operatorname{tg}\sigma = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \lambda) \operatorname{tg}\sigma$.

2. $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = q$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{q+1}{q-1} \operatorname{tg}\delta$.

Wenn q ein zusammengesetzter Ausdruck ist, so setze $\frac{1}{q} = \operatorname{tg}\lambda$, dann ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{1 + \operatorname{tg}\lambda}{1 - \operatorname{tg}\lambda} \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \lambda) \operatorname{tg}\delta$.

3. $\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} = q$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\varphi - \psi) + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{q+1}{q-1} \operatorname{tg}(\sigma - \frac{1}{4}\pi)$.

4. $\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} = p$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{q-1}{q+1}\operatorname{tg}(\delta + \frac{1}{4}\pi)$.

5. $\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = q$, $\varphi + \psi = 2\sigma$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \frac{q-1}{q+1}\cot\sigma$.

6. $\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = q$, $\varphi - \psi = 2\delta$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{1-q}{1+q}\cot\delta$.

7. $\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)} = q$. (Spez. Fall von 1.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \varphi\right) = \frac{q-1}{q+1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

8. $\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} = q$. (Spez. Fall von 2.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \varphi\right) = \frac{q+1}{q-1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

9. $\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)} = q$. (Spez. Fall von 3.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \varphi + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{q+1}{q-1}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{4}\pi\right)$.

10. $\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)} = q$. (Spez. Fall von 4.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \varphi - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{q-1}{q+1}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \frac{1}{4}\pi\right)$.

11. $\frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)} = q$. (Spez. Fall von 5.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \varphi\right) = \frac{1-q}{1+q}\cot\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

12. $\frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)} = q$. (Spez. Fall von 6.) Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \varphi\right) = \frac{1-q}{1+q}\cot\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

§. 8.

Die Winkel φ und ψ zu berechnen, wenn zwei Summen oder Differenzen aus ihren Sinus und Cosinus, oder aus ihren Tangenten und Cotangenten gegeben sind.

In den Aufgaben 1 bis 7 wird zunächst $\varphi + \psi$ oder $\varphi - \psi$ berechnet; dadurch sind dieselben auf eine der Aufgaben von §. 4, a zurückgeführt.

1. $\sin\varphi + \sin\psi = s$, $\cos\varphi + \cos\psi = s'$. Aufl. Durch Verwandlung der gegebenen Gleichungen in Producte und Division derselben erhält man $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{s}{s'}$.

2. $\sin\varphi - \sin\psi = d$, $\cos\varphi - \cos\psi = d'$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = -\frac{d'}{d}$.

3. $\sin\varphi + \sin\psi = s$, $\cos\varphi - \cos\psi = d$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = -\frac{d}{s}$.

4. $\cos\varphi + \cos\psi = s$, $\sin\varphi - \sin\psi = d$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{d}{s}$.

5. $\sin\varphi + \cos\psi = s$, $\cos\varphi + \sin\psi = s'$. Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\varphi - \psi) + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{s}{s'}$.

6. $\sin\varphi - \cos\psi = d$, $\cos\varphi - \sin\psi = d'$. Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\varphi - \psi) + \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{d'}{d}$.

7. $\sin\varphi + \cos\psi = s$, $\cos\varphi - \sin\psi = d$. Aufl. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{d}{s}$.

8. $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = s$, $\cot\varphi + \cot\psi = s'$. Aufl. $\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\varphi\cos\psi} = \frac{2\sin(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi-\psi)+\cos(\varphi+\psi)} = s$; $\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin\varphi\sin\psi} = \frac{2\sin(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi-\psi)-\cos(\varphi+\psi)} = s'$; mithin $2\sin(\varphi+\psi) = s\cos(\varphi-\psi) + s\cos(\varphi+\psi)$
$2\sin(\varphi+\psi) = s'\cos(\varphi-\psi) - s'\cos(\varphi+\psi)$ und hieraus $\operatorname{tg}(\varphi+\psi) = \frac{s\,s'}{s'-s}$ und $\cos(\varphi-\psi) = \frac{(s+s')\sin(\varphi+\psi)}{s\,s'}$.

9. $\operatorname{tg}\varphi + \cot\psi = s$, $\cot\varphi + \operatorname{tg}\psi = s'$. Aufl. $\frac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos\varphi\sin\psi} = \frac{2\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)-\sin(\varphi-\psi)} = s$; $\frac{\cos(\varphi-\psi)}{\sin\varphi\cos\psi} = \frac{2\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)+\sin(\varphi-\psi)} = s'$. Hieraus $\operatorname{tg}(\varphi-\psi) = \frac{s-s'}{s\,s'}$ und $\sin(\varphi+\psi) = \frac{(s+s')\cos(\varphi-\psi)}{s\,s'}$.

10. $\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = d$, $\cot\varphi - \cot\psi = d'$. Aufl. $\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\cos\varphi\cos\psi} = \frac{2\sin(\varphi-\psi)}{\cos(\varphi-\psi)+\cos(\varphi+\psi)} = d$; $\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi\sin\psi} = \frac{2\sin(\varphi-\psi)}{\cos(\varphi-\psi)-\cos(\varphi+\psi)}$

$= - d'$. Hieraus $\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{d\,d'}{d' - d}$ und $\cos(\varphi + \psi) = \frac{(d + d')\sin(\varphi - \psi)}{d\,d'}$.

§. 9.

Winkel zu berechnen, wenn zwei Producte oder zwei Quotienten ihrer Sinus oder Cosinus gegeben.

a) Zwei Winkel sind zu berechnen.

1. $\sin\varphi \sin\psi = p$, $\cos\varphi \cos\psi = p'$. Aufl. $\cos(\varphi + \psi) = p' - p$; $\cos(\varphi - \psi) = p + p'$.
2. $\sin\varphi \cos\psi = p$, $\cos\varphi \sin\psi = p'$. Aufl. $\sin(\varphi + \psi) = p + p'$, $\sin(\varphi - \psi) = p - p'$
3. $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{p}{q}$; $\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \frac{p'}{q'}$. (Wenn $\frac{p}{q} > 1$, so muß $\frac{p'}{q'} < 1$ sein und umgekehrt.) 1. Aufl. $\operatorname{tg}{}^1\!/_2(\varphi + \psi)\cot{}^1\!/_2(\varphi - \psi) = \frac{p + q}{p - q}$ und $\cot{}^1\!/_2(\varphi + \psi)\cot{}^1\!/_2(\varphi - \psi) = \frac{q' + p'}{q' - p'}$. Hieraus $\operatorname{tg}{}^1\!/_2(\varphi + \psi) = \pm\sqrt{\frac{(p + q)(q' - p')}{(p - q)(q' + p')}}$ (a) und $\operatorname{tg}{}^1\!/_2(\varphi - \psi) = \pm\sqrt{\frac{(p - q)(q' - p')}{(p + q)(q' + p')}}$ (b). 2. Aufl. Soll φ allein berechnet werden, so ist folgender Weg einzuschlagen: $\sin\psi^2 + \cos\psi^2 = 1$, also $\frac{q^2}{p^2}\sin\varphi^2 + \frac{q'^2}{p'^2}\cos\varphi^2 = 1 = \sin\varphi^2 + \cos\varphi^2$; und hieraus $\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{p}{p'}\sqrt{\frac{(q' + p')(q' - p')}{(p + q)(p - q)}}$ (c). 3. Aufl. Sind p, q, p', q' Producte oder Quotienten von Linien, so kann man φ und ψ besser auf folgende Weise berechnen: Man setze $\frac{p}{q} = \operatorname{tg}\mu \cot\nu$ und $\frac{p'}{q'} = \operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\nu$, also $\operatorname{tg}\mu = \sqrt{\frac{p\,p'}{q\,q'}}$ (d) und $\operatorname{tg}\nu = \sqrt{\frac{q\,p'}{p\,q'}}$ (e). Die vorher aufgestellten Werthe in (a) und (b) eingesetzt, giebt $\operatorname{tg}{}^1\!/_2(\varphi + \psi) = \pm\sqrt{\frac{\left(\frac{p}{q} + 1\right)\left(1 - \frac{p'}{q'}\right)}{\left(\frac{p}{q} - 1\right)\left(1 + \frac{p'}{q'}\right)}} = \pm\sqrt{\frac{\sin(\mu + \nu)\cos(\mu + \nu)}{\sin(\mu - \nu)\cos(\mu - \nu)}} = \pm\sqrt{\frac{\sin 2(\mu + \nu)}{\sin 2(\mu - \nu)}}$ und $\operatorname{tg}{}^1\!/_2(\varphi - \psi) = \pm\sqrt{\frac{\sin(\mu - \nu)\cos(\mu + \nu)}{\sin(\mu + \nu)\cos(\mu - \nu)}} = \pm\sqrt{\operatorname{tg}(\mu - \nu)\cot(\mu + \nu)}$. Ferner in (c) eingesetzt, giebt $\operatorname{tg}\varphi =$

$\pm\sqrt{\frac{(\cot\mu\cot\nu+1)(\cot\mu\cot\nu-1)}{(1+\cot\mu\,\mathrm{tg}\,\nu)\;(1-\cot\mu\,\mathrm{tg}\,\nu)}} = \pm\cot\nu\sqrt{\frac{\cos(\mu-\nu)\cos(\mu+\nu)}{\sin(\mu+\nu)\sin(\mu-\nu)}}$ $= \pm\cot\nu\sqrt{\cot(\mu+\nu)\cot(\mu-\nu)}$. Ebenso $\mathrm{tg}\,\psi =$ $\pm\,\mathrm{tg}\,\nu\sqrt{\cot(\mu+\nu)\cot(\mu-\nu)} = \pm\frac{\sqrt{\cot(\mu+\nu)\cot(\mu-\nu)}}{\cot\nu}$.

4. Aufl. $\frac{q}{p} = \cos\lambda$ und $\frac{p'}{q'} = \cos\lambda'$ in (a), (b) und (c) eingesetzt, giebt $\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,(\varphi+\psi) = \pm\sqrt{\frac{(1+\cos\lambda)\;(1-\cos\lambda')}{(1-\cos\lambda)\;(1+\cos\lambda')}} =$ $\cot{}^1\!/_2\,\lambda\;\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,\lambda'$, $\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,(\varphi-\psi) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\lambda)\;(1-\cos\lambda')}{(1+\cos\lambda)\;(1+\cos\lambda')}} =$ $\pm\,\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,\lambda\;\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,\lambda'$, $\mathrm{tg}\,\varphi = \pm\frac{\mathrm{tg}\,\lambda'}{\sin\lambda}$ und $\mathrm{tg}\,\psi = \pm\cot\lambda\sin\lambda'$.

5. Aufl. $\frac{p}{q} = \mathrm{tg}\,\varkappa$, $\frac{p'}{q'} = \mathrm{tg}\,\varkappa'$ gesetzt, liefert die einfachen Ausdrücke $\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,(\varphi+\psi) = \pm\sqrt{\cot(\varkappa-{}^1\!/_4\,\pi)\;\mathrm{tg}\,({}^1\!/_4\,\pi-\varkappa')}$ und $\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,(\varphi-\psi) = \pm\sqrt{\mathrm{tg}\,(\varkappa-{}^1\!/_4\,\pi)\;\mathrm{tg}\,({}^1\!/_4\,\pi-\varkappa')}$; weniger bequem ist dagegen $\mathrm{tg}\,\varphi = \pm\frac{\sin\varkappa}{\sin\varkappa'}\sqrt{-\frac{\cos 2\varkappa'}{\cos 2\varkappa}}$; $\mathrm{tg}\,\psi = \pm\frac{\cos\varkappa}{\cos\varkappa'}$ $\sqrt{-\frac{\cos 2\varkappa'}{\cos 2\varkappa}}$.

4. $\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} = \frac{p}{q}, \frac{\cos\varphi}{\sin\psi} = \frac{p'}{q'}$. (Wenn $\frac{p}{q} > 1$, so muß $\frac{p'}{q'} < 1$ sein.) Aufl. wie die von 3., wenn $\psi = {}^1\!/_2\,\pi - \psi'$ gesetzt wird.

b) Vier Winkel sind zu berechnen.

Die vier Winkel φ, φ', ψ, ψ' zu berechnen aus $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}$ (I) und $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}$ (II), wenn noch $\varphi\pm\psi$, $\varphi'\pm\psi'$ bekannt ist. Es werde $\varphi+\psi$ mit 2σ, $\varphi'+\psi'$ mit $2\sigma'$, $\varphi-\psi$ mit 2δ, $\varphi'-\psi'$ mit $2\delta'$ bezeichnet, und endlich wollen wir noch die Hülfswinkel $\varkappa$ und λ durch $\mathrm{tg}\,\varkappa = \frac{m}{m'}$, $\mathrm{tg}\,\lambda = \frac{n}{n'}$ einführen. Nach bekannter Entwicklung erhält man aus (I) $\frac{\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,(\varphi+\varphi')}{\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,(\varphi-\varphi')} = \frac{m+m'}{m-m'}$, oder $\frac{\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,(\sigma+\sigma'+\delta+\delta')}{\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,(\sigma-\sigma'+\delta-\delta')}$ $= \frac{m+m'}{m-m'} = -\,\mathrm{tg}\,({}^1\!/_4\,\pi+\varkappa) = \cot(\varkappa-{}^1\!/_4\,\pi)$ (III) und ebenso aus (II) $\frac{\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,(\sigma+\sigma'-\delta-\delta')}{\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\,(\sigma-\sigma'-\delta+\delta')} = \frac{n+n'}{n-n'} = -\,\mathrm{tg}\,({}^1\!/_4\,\pi+\lambda) =$ $\cot(\lambda-{}^1\!/_4\,\pi)$ (IV).

$\varphi, \psi, \varphi', \psi'$ zu berechnen aus

5. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}, \frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}, \varphi + \psi = 2\sigma, \varphi' + \psi' = 2\sigma$. In (III) und (IV) ist σ statt σ' zu setzen, und diese Gleichungen gehen über in $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma + \delta + \delta')}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta - \delta')} = \frac{m + m'}{m - m'}$ und $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma - \delta - \delta')}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta - \delta')} = \frac{n + n'}{n - n'}$. Durch Division ergiebt sich hieraus $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma + \delta + \delta')}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma - \delta - \delta')} = \frac{(m + m')(n - n')}{(m - m')(n + n')} = -\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \varkappa)\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \lambda)$, so daß $\delta + \delta'$ nach §. 6, 9 berechnet werden kann. Es ergiebt sich $\sin(\delta + \delta') = \frac{\sin 2\sigma \cos(\varkappa + \lambda)}{\sin(\varkappa - \lambda)}$. Zur Berechnung von $\delta - \delta'$, mithin auch von δ und δ' selbst, dienen die Gleichungen $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta - \delta') = \frac{m - m'}{m + m'}$. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma + \delta + \delta') = -\frac{n - n'}{n + n'}$. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma - \delta - \delta') = -\cot(\frac{1}{4}\pi + \varkappa)\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma + \delta + \delta') = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \lambda)\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma - \delta - \delta')$.

6. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}, \frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}, \varphi - \psi = 2\delta, \varphi' - \psi' = 2\delta$. In (III) und (IV) ist δ für δ' zu setzen. Dann gelangt man durch ähnliche Rechnung wie in 5) zu $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma + \sigma' + 2\delta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma + \sigma' - 2\delta)} = \frac{(m + m')(n - n')}{(m - m')(n + n')} = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \varkappa)\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \lambda)$, so daß $\sigma + \sigma'$ nach §. 6, 10 zu berechnen ist. Man findet $\sin(\sigma + \sigma') = \frac{\sin 2\delta \cos(\varkappa + \lambda)}{\sin(\varkappa - \lambda)}$. Zur Berechnung von $\sigma - \sigma'$ hat man, ähnlich wie in 5), für $\delta - \delta'$ zwei Gleichungen.

7. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}, \frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}, \varphi + \psi = 2\sigma, \varphi' + \psi' = \pi - 2\sigma$. In (III) und (IV) ist $\frac{1}{2}\pi - \sigma$ für σ' zu setzen, wodurch diese Gleichungen in $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \delta + \delta')}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi + \delta - \delta')} = \frac{m + m'}{m - m'}$ und $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - \delta - \delta')}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi - \delta + \delta')} = \frac{n + n'}{n - n'}$, übergehen. Durch Multiplication erhält man $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi + \delta - \delta')\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2\sigma - \frac{1}{2}\pi - \delta + \delta') = \frac{(m - m')(n - n')}{(m + m')(n + n')} = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \varkappa)\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \lambda)$, so daß $\delta - \delta'$ nach §. 6, 7 berechnet werden kann. Es ergiebt sich $\cos(\delta - \delta') =$

$\frac{\sin 2\sigma \cos(\varkappa-\lambda)}{\sin(\varkappa+\lambda)}$. Schließlich findet man $\delta+\delta'$, mithin auch δ und δ' selbst aus $\operatorname{tg} {}^1/_2 ({}^1/_2\pi + \delta + \delta') = \frac{m+m'}{m-m'}$, $\operatorname{tg} {}^1/_2 (2\sigma - {}^1/_2\pi + \delta - \delta') = -\cot({}^1/_4\pi-\varkappa) \operatorname{tg} {}^1/_2 (2\sigma - {}^1/_2\pi + \delta - \delta') = \frac{n-n'}{n+n'}$. $\cot {}^1/_2 (2\sigma - {}^1/_2\pi - \delta + \delta') = -\operatorname{tg}({}^1/_4\pi - \lambda) \operatorname{tg} {}^1/_2 (2\sigma - {}^1/_2\pi - \delta + \delta')$.

8. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}$, $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}$, $\varphi - \psi = 2\delta$, $\varphi' = \psi' = \pi - 2\delta$. In (III) und (IV) ist ${}^1/_2\pi - \delta$ für δ' zu setzen. Aehnlich wie bei 7) gelangt man zu $\operatorname{tg} {}^1/_2 (\sigma - \sigma' + 2\delta - {}^1/_2\pi) \operatorname{tg} {}^1/_2 (\sigma - \sigma' - 2\delta + {}^1/_2\pi) = -\frac{(m-m')(n-n')}{(m+m')(n+n')} = -\operatorname{tg}({}^1/_4\pi-\varkappa)\operatorname{tg}({}^1/_4\pi-\lambda)$, so daß $\sigma - \sigma'$ nach §. 6, 8 zu berechnen ist. Es ergiebt sich $\cos(\sigma-\sigma') = \frac{\sin 2\delta \cos(\varkappa-\lambda)}{\sin(\varkappa+\lambda)}$. Die Berechnung von $\sigma+\sigma'$ geschieht ähnlich, wie die von $\delta+\delta'$ in 7).

Anmerkung. Aehnlich lassen sich die Winkel φ, φ', ψ, ψ' berechnen, wenn außer (I) und (II) σ und σ' gegeben ist, und $\sigma \pm \sigma'$ ein Vielfaches von ${}^1/_2\pi$; ferner, wenn außer (I) und (II) δ und δ' gegeben sind, und $\delta \pm \delta'$ ein Vielfaches von ${}^1/_2\pi$; schließlich noch, wenn außer (I) und (II) σ und δ' (oder auch σ' und δ) gegeben sind, und $\sigma = \delta'$ oder $\sigma \pm \delta'$ ein Vielfaches von ${}^1/_2\pi$ ist.

9. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}$, $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}$, $\varphi + \psi = 2\sigma$, $\varphi' + \psi' = 2\sigma'$. Aus (III) und (IV) ist $\delta - \delta'$ zu eliminiren und $\delta + \delta'$ zu berechnen. Zur Elimination dient $\sigma - \sigma' = {}^1/_2(\sigma - \sigma' + \delta - \delta') + {}^1/_2(\sigma - \sigma' - \delta + \delta')$, mithin $\operatorname{tg}(\sigma-\sigma') = \frac{\operatorname{tg}{}^1/_2(\sigma-\sigma'+\delta-\delta') + \operatorname{tg}{}^1/_2(\sigma-\sigma'-\delta+\delta')}{1-\operatorname{tg}{}^1/_2(\sigma-\sigma'+\delta-\delta')\operatorname{tg}{}^1/_2(\sigma-\sigma'-\delta+\delta')}$. Setzt man hierin für $\operatorname{tg}{}^1/_2(\sigma-\sigma'+\delta-\delta')$ und $\operatorname{tg}{}^1/_2(\sigma-\sigma'-\delta+\delta')$ ihre aus (III) und (IV) entwickelten Ausdrücke, so erhält man $\operatorname{tg}(\sigma-\sigma') =$

$$\frac{(m-m')(n+n')\operatorname{tg}{}^1/_2(\sigma+\sigma'+\delta+\delta') + (m+m')(n-n')\operatorname{tg}{}^1/_2(\sigma+\sigma'-\delta-\delta')}{(m+m')(n+n') - (m-m')(n-n')\operatorname{tg}{}^1/_2(\sigma+\sigma'+\delta+\delta')\operatorname{tg}{}^1/_2(\sigma+\sigma'-\delta-\delta')}$$

und nach einiger Entwicklung $\operatorname{tg}(\sigma-\sigma') = \frac{(mn-m'n')\sin(\sigma+\sigma') + (mn'-m'n)\sin(\delta+\delta')}{(mn+m'n')\cos(\sigma+\sigma') + (mn'+m'n)\cos(\delta+\delta')}$, endlich $(mn'+m'n)\operatorname{tg}(\sigma-\sigma')\cos(\delta+\delta') - (mn'-m'n)\sin(\delta+\delta') = (mn-m'n')\sin(\sigma+\sigma') - (mn+m'n')\operatorname{tg}(\sigma-\sigma')\cos(\sigma+\sigma')$ oder nach Einführung der Hülfswinkel $\sin(\varkappa+\lambda)\operatorname{tg}(\sigma-\sigma')\cos(\delta+\delta') - \sin(\varkappa-\lambda)\sin(\delta+\delta') = -\cos(\varkappa+\lambda)\sin(\sigma+\sigma') -$

$\cos(\varkappa - \lambda)\,\mathrm{tg}(\sigma - \sigma')\cos(\sigma + \sigma')$. Zunächst ist die rechte Seite nach §. 3, 2 für die Logarithmenrechnung bequemer einzurichten und dann $\delta + \delta'$ nach §. 3, 1 zu berechnen. Zur Berechnung von $\delta - \delta'$, mithin auch von δ und δ' selbst erhält man aus (III) und (IV) $\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2(\sigma - \sigma' + \delta - \delta') = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot \mathrm{tg}\,{}^1\!/_2(\sigma + \sigma' + \delta + \delta') =$ $\mathrm{tg}(\varkappa - {}^1\!/_4\pi)\,\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2(\sigma + \sigma' + \delta + \delta')$ und $\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2(\sigma - \sigma' - \delta + \delta') =$ $\frac{n - n'}{n + n'} \cdot \mathrm{tg}\,{}^1\!/_2(\sigma + \sigma' - \delta - \delta') = \mathrm{tg}(\lambda - {}^1\!/_4\pi)\,\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2(\sigma + \sigma' - \delta - \delta')$.

10. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}, \frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}, \varphi - \psi = 2\delta, \varphi' - \psi' = 2\delta'$. Aus (III) und (IV) ist $\sigma - \sigma'$ zu eliminiren, $\sigma + \sigma'$ zu berechnen. Durch ein ähnliches Verfahren, wie bei 9) gelangt man zu der Gleichung $(mn' + m'n)\,\mathrm{tg}(\delta - \delta')\cos(\sigma + \sigma') - (mn' - m'n)\sin(\sigma + \sigma') =$ $(mn - m'n')\sin(\delta + \delta') - (mn + m'n')\,\mathrm{tg}(\delta - \delta')\cos(\delta + \delta')$, die nach Einführung der Hülfswinkel in $\sin(\varkappa + \lambda)\,\mathrm{tg}(\delta - \delta')$ $\cos(\sigma + \sigma') - \sin(\varkappa - \lambda)\sin(\sigma + \sigma') = -\cos(\varkappa + \lambda)\sin(\delta + \delta')$ $- \cos(\varkappa - \lambda)\,\mathrm{tg}(\delta - \delta')\cos(\delta + \delta')$. Nachdem die rechte Seite nach §. 3, 2 für logarithmische Zwecke bequemer eingerichtet ist, ist $\sigma + \sigma'$ nach §. 3, 1 zu berechnen, dann $\sigma - \sigma'$ aus (III) oder (IV). Uebrigens läßt sich diese Aufgabe als specieller Fall der vorigen 9) ansehen und sich auf dieselbe zurückführen, wenn man für ψ und ψ' bezüglich $-\psi$ und $-\psi'$ setzt. Man braucht dann in der Endformel nur σ und δ, sowie σ' und δ' miteinander zu vertauschen.

11. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{m'}, \frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{n}{n'}, \varphi + \psi = 2\sigma, \varphi' - \psi' = 2\delta'$. Aus (III) und (IV) ist $\sigma' - \delta$ zu eliminiren, $\sigma' + \delta'$ zu berechnen. Die Rechnung ist ähnlich auszuführen wie bei 9) und man gelangt schließlich zu $(mn' - m'n)\,\mathrm{tg}(\sigma - \delta')\cos(\sigma' + \delta) - (mn' + m'n)$ $\sin(\sigma' + \delta) = (mn - m'n')\,\mathrm{tg}(\sigma - \delta')\cos(\sigma + \delta') - (mn + m'n')$ $\sin(\sigma + \delta')$, oder nach Einführung der Hülfswinkel $\sin(\varkappa - \lambda)$ $\mathrm{tg}(\sigma - \delta')\cos(\sigma' + \delta) - \sin(\varkappa + \lambda)\sin(\sigma' + \delta) = -\cos(\varkappa + \lambda)$ $\mathrm{tg}(\sigma - \delta')\cos(\sigma + \delta') - \cos(\varkappa - \lambda)\sin(\sigma + \delta')$. Nachdem man die rechte Seite nach §. 3, 2 für logarithmische Zwecke bequemer eingerichtet hat, ist $\sigma' + \delta$ nach §. 3, 1 zu berechnen, dann $\sigma' - \delta$ aus (III) oder (IV). Auch diese Aufgabe ergiebt sich als specieller Fall von 9), wenn man daselbst $-\psi'$ für ψ', $-n'$ für n', $-\lambda$ für λ setzt. In den Endformeln sind dann δ' und σ' miteinander zu vertauschen.

§. 10.

Trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen.

Erste Auflösungsmethode.

I. $x^2 \pm ax + b = 0$. Beide Wurzeln haben dasselbe Vorzeichen.

1. $x^2 + ax + b = 0$. Beide Wurzeln sind negativ. Es ergiebt sich $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} = -\frac{1}{2}a\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)$; wir substituiren $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, wo nur das positive Zeichen gilt, da das negative zu demselben Resultat führt; dann sind die Wurzeln der Gleichung $x_1 = -\frac{1}{2}a(1 - \cos\varphi) = -a \sin\frac{1}{2}\varphi^2 = -\sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$ und $x_2 = -\frac{1}{2}a(1 + \cos\varphi) = -a\cos\frac{1}{2}\varphi^2 = -\sqrt{b}\cot\frac{1}{2}\varphi$.

2. $x^2 - ax + b = 0$. Beide Wurzeln sind positiv. Durch dieselbe Substitution wie in 1) ergiebt sich $x_1 = a\cos\frac{1}{2}\varphi^2 = \sqrt{b}\cot\frac{1}{2}\varphi$ und $x_2 = a\sin\frac{1}{2}\varphi^2 = a\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$. Dasselbe Resultat würde man erhalten, wenn man bedenkt, daß sich die Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ aus $x^2 + ax + b = 0$ ergiebt, wenn das Vorzeichen von x umgekehrt wird.

II. $x^2 \pm ax - b = 0$. Beide Wurzeln haben verschiedene Vorzeichen.

3. $x^2 + ax - b = 0$. Die größere Wurzel ist negativ, die kleinere positiv. Es ist $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b} = \frac{1}{2}a\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right)$. Wir substituiren $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$; so ist $x_1 = \frac{1}{2}a\left(-1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{1}{2}a\frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{a\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi} = \sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$, und $x_2 = -\frac{1}{2}a\left(1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right) = -\frac{1}{2}a\frac{1 + \cos\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{a\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi} = -\sqrt{b}\cot\frac{1}{2}\varphi$.

4. $x^2 - ax - b = 0$. Die größere Wurzel ist positiv, die kleinere negativ. Durch dieselbe Substitution wie in 3) ergiebt sich $x_1 = \frac{a\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi} = \sqrt{b}\cot\frac{1}{2}\varphi$; $x_2 = -\frac{a\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi} = -\sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$

Zweite Auflösungsmethode.

1. $x^2 + ax + b = 0$. Es ist $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1 x_2 = b$, mithin setzen wir $x_1 = -\sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ und $x_2 = -\sqrt{b}\cot\varphi$.

Durch Addition erhalten wir $a = \sqrt{b}\,(\mathrm{tg}\,\varphi + \cot\varphi)$ oder $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

2. $x^2 - ax + b = 0$. Es ist $x_1 + x_2 = a$ und $x_1 x_2 = b$, daher setzen wir $x_1 = \sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ und $x_2 = \sqrt{b}\cot\varphi$ und erhalten wie in 1) $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

3. $x^2 + ax - b = 0$. Da $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1 x_2 = -b$, so setzen wir $x_1 = \sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ und $x_2 = -\sqrt{b}\cot\varphi$, mithin $a = \sqrt{b}\,(\cot\varphi - \mathrm{tg}\,\varphi) = \frac{2\sqrt{b}\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}$ oder $\mathrm{tg}\,2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

4. $x^2 - ax - b = 0$. Durch dieselbe Substitution wie in 3) ergiebt sich $\mathrm{tg}\,(\pi - 2\varphi) = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

Zusatz. Wenn die Summe zweier Größen und ihr Product gegeben, z. B. $x + y = a$ und $xy = b$, so kann man x und y aus einer quadratischen Gleichung finden; will man aber die unbekannten Größen trigonometrisch berechnen, so kann man sofort, ohne die Gleichung aufzustellen, die bei der zweiten Auflösungsmethode unter 1) und 2) angegebenen Substitutionen machen. Ist $x - y = a$ und $xy = b$ oder $x\,(-y) = -b$ gegeben, so sind die Substitutionen unter 3) und 4) anzuwenden.

Zweiter Abschnitt.

Dreiecks-Aufgaben.

§. 11.

Aufgaben, welche durch einfache Anwendung der vier Hauptfälle zu lösen sind.

Erster Hauptfall. Gegeben eine Seite c und die Winkel α und β. Aufl. $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$; $a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$; $b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$; $\triangle = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}$.

Zweiter Hauptfall. Gegeben zwei Seiten a und c, und $\angle\,\alpha$, welcher einer von ihnen gegenüberliegt. Aufl. 1) $a > c$;

$\sin\gamma = \frac{c \sin\alpha}{a}$; $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$; $b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$. 2) $c > a$; $\sin\gamma = \sin(\pi - \gamma) = \frac{c \sin\alpha}{a}$; dann ergeben sich zwei Werthe für β, und zwei Werthe für b.

Dritter Hauptfall. Gegeben zwei Seiten a und b, und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ. 1. Aufl. Aus dem Tangentialsatz folgt: $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{(a-b)\cot \frac{1}{2}\gamma}{a+b}$; da $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma$, so ergiebt sich α und β durch einfache Addition und Subtraction; $c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta}$. 2. Aufl. In den Gaußischen (Mollweideschen) Formeln: $(a + b)\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = c \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und $(a - b)\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = c \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ lassen sich die linken Seiten logarithmisch berechnen; durch Subtraction findet man dann $\log\cot\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, hieraus $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und wie bei der ersten Auflösung α und β; setzt man nun den für $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ gefundenen Werth in jede der beiden Formeln ein, so findet man c auf zwei verschiedene Weise und hat so gleichzeitig eine Controlle der Rechnung. 3. Aufl. Nach dem Projectionssatz ist: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ (§. 3, 10), $\triangle = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.

Vierter Hauptfall. Gegeben die drei Seiten a, b, c. 1. Aufl. Aus dem Projectionssatz folgt: $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, wenn $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$; $\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Die Berechnung der Winkel aus den Formeln $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ liefert nicht so sichere Resultate, wie die mittelst der Tangente, da sich letztere mit den Winkeln schneller ändert, als der Sinus und Cosinus.

a) Aufgaben, welche sich auf die Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks oder auf den ersten Hauptfall zurückführen lassen.

1. a, b, h_c	8. h_c, p, q	15. h_c, p, γ	22. h_c, p, $\alpha - \beta$
2. a, h_c, α	9. a, p, α	16. b, p, β	23. h_a, p — q, β
3. a, h_c, γ	10. p, α, β	17. b, h_a, q	24. a, h_c, p — q
4. h_c, α, β	11. h_c, p, α	18. h_a, h_c, q	25. w_c, α, β
5. c, h_a, h_b	12. a, p, γ	19. h_a, q, α	
6. h_a, h_c, α	13. a, q, β	20. c, h_a, $\alpha - \beta$	
7. a, p, q	14. a, h_c, q	21. a, p, $\alpha - \beta$	

b) Aufgaben, bei deren Lösung der zweite Hauptfall zu benutzen ist.

26. a, b, p,
27. a, w_c, β
28. w_c, u, β
29. w_c, u, γ
30. a, u, γ
31. a, w_c, p
32. w_c, p, β.

c) Aufgaben, bei deren Lösung der dritte Hauptfall Anwendung findet:

33. h_a, h_b, γ
34. h_a, p, β
35. a, h_c, t_c
36. $a, t_c, \angle (c\,t_c)$
37. $c, t_c, \angle (a\,t_c)$
38. h_c, t_c, α
39. $a, c, \angle (c\,t_c)$
40. $a, h_c, \angle (c\,t_c)$
41. $c, h_c, \angle (c\,t_c)$
42. a, c, h_c
43. c, h_c, α
44. a, h_a, h_c
45. a, w_c, γ
46. $a, t_c, \angle (a\,t_c)$
47. $c, t_c, \angle (c\,t_c)$
48. c, t_c, h_c
49. $t_c, \alpha, \angle (c\,t_c)$
50. $c, \alpha, \angle (c\,t_c)$
51. $a, \beta, \angle (a\,t_c)$
52. $a, h_c, \angle (a\,t_c)$
53. $c, h_a, \angle (a\,t_c)$
54. $c, h_a, \angle (c\,t_c)$
55. $h_a, \beta, \angle (a\,t_c)$
56. $h_c, \beta, \angle (a\,t_c)$
57. $h_c, t_c, \angle (a\,t_c)$
58. $h_c, \alpha, \angle (c\,t_c)$
59. $h_a, \beta, \angle (c\,t_c)$
60. a, t_c, β
61. c, t_c, α
62. c, h_a, t_c
63. h_b, t_c, α
64. $a, c, \angle (a\,t_c)$
65. a, u, β
66. a, p, t_c
67. h_c, t_c, p
68. t_c, p, β
69. a, p, t_a
70. h_c, p, t_a
71. p, t_a, β
72. $a, p, \angle (a\,t_c)$
73. $h_c, p, \angle (a\,t_c)$
74. $p, \beta, \angle (a\,t_c)$
75. $a, p, \angle (c\,t_c)$
76. $h_c, p, \angle (c\,t_c)$
77. $a, p, \angle (c\,t_a)$
78. $h_c, p, \angle (c\,t_a)$
79. $p, \beta, \angle (c\,t_a)$
80. $a, p, \angle (a\,t_a)$
81. $h_c, p, \angle (a\,t_a)$
82. $p, \beta, \angle (a\,t_a)$
83. $h_c, \angle (c\,t_c), \angle (a\,t_c)$
84. a, h_a, p
85. a, p, u
86. a, h_c, u
87. h_c, p, u
88. h_c, u, β
89. p, u, β
90. a, p, w_b
91. a, h_c, w_b
92. h_c, p, w_b
93. h_c, w_b, β
94. p, w_b, β.

d) Aufgaben, welche auf den vierten Hauptfall zurückzuführen sind.

95. a, c, t_c
96. a, w_c, u.

e) Zu den folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß $\angle (h_c\,w_c) = \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ ist.

97. a, h_c, w_c
98. h_c, w_c, α
99. h_c, w_c, γ
100. $a, w_c, \alpha - \beta$
101. $w_c, u, \alpha - \beta$
102. $a, u, \alpha - \beta$
103. h_c, p, w_c
104. $h_c, u, \alpha - \beta$
105. h_c, w_c, u
106. b, h_c, w_c
107. $p, w_c, \alpha - \beta$.

f) Aufgaben, in denen zu beachten, daß $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2\,r$ ist.

108. r, α, β
109. c, r, α
110. $c, r, \alpha - \beta$
111. r, h_c, α
112. r, p, α
113. r, p, β
114. a, h_c, r
115. r, h_c, p
116. a, r, p
117. a, c, r
118. $c, r, \alpha - \beta$
119. $a, r, \alpha - \beta$

g) Aufgaben, in denen zu beachten, daß $2 \triangle = c\,h_c$ ist.

120. $p, q, \triangle$
121. $h_c, p, \triangle$
122. $h_c, p - q, \triangle$

123. c, $\triangle$, $\angle (c\,t_c)$
124. h_c, $\triangle$, $\angle (c\,t_c)$
125. a, c, $\triangle$
126. a, h_c, $\triangle$
127. h_a, h_b, $\triangle$
128. c, t_c, $\triangle$
129. h_c, t_c, $\triangle$
130. a, p, $\triangle$
131. h_a, p, $\triangle$
132. a, $h_b + h_a$, $\triangle$
133. a, $h_b - h_a$, $\triangle$.

h) Aufgaben, welche nach (a) gelöst werden können, aber auch einfacher mittelst der Formel $\frac{p}{q} = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}$.

134. p, q, α
135. h_a, p, q
136. h_a, p, β
137. h_a, q, β
138. h_a, $p - q$, β.

i) In den folgenden Aufgaben, in denen t_c oder durch die Richtung von t_c bedingte Winkel gegeben, sind die vier Hauptfälle nicht unmittelbar auf das Dreieck ABC anzuwenden, es ist zunächst eine Hülfsconstruction zu machen, nämlich $CD = t_c$ über D um sich selbst bis E zu verlängern, und dann zunächst $\triangle$ CEB zu berechnen; in demselben ist $CE = 2\,t_c$, $BE = b$, $\angle CBE = \pi - \gamma$, $\angle CEB = \angle (b\,t_c)$ ein von E auf BC gefälltes Loth ist $= h_a$.

139. a, t_c, γ
140. a, h_b, t_c
141. h_a, t_c, γ
142. a, h_a, $\angle (a\,t_c)$
143. a, h_a, t_c
144. h_a, t_c, $\triangle$
145. t_c, $\angle (a\,t_c)$, $\angle (b\,t_c)$
146. a, $\angle (a\,t_c)$, $\angle (b\,t_c)$
147. h_a, t_c, $\angle (b\,t_c)$
148. h_a, t_c, $\angle (c\,t_c)$
149. h_a, h_c, t_c
150. h_a, h_b, t_c
151. a, b, $\angle (a\,t_c)$
152. a, t_c, $\angle (b\,t_c)$
153. b, h_a, $\angle (a\,t_c)$
154. h_a, h_c, $\angle (a\,t_c)$
155. h_a, h_b, $\angle (a\,t_c)$
156. h_a, $\angle (a\,t_c)$, $\angle (b\,t_c)$
157. h_a, $\angle (a\,t_c)$, $\angle (c\,t_c)$
158. a, b, t_c

§. 12.

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, besonders solche, in denen Aggregate der Seiten gegeben.

Formeln für das rechtwinklige Dreieck: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$, $\cot\alpha = \frac{b}{a}$.

a) In den folgenden Aufgaben ist ein Aggregat zweier Seiten und außerdem noch eine Seite gegeben; sie lassen sich sowohl trigonometrisch, wie rein algebraisch auflösen; im ersteren Fall sind zunächst die Winkel, im letzteren die Seiten zu berechnen.

1. $a + b$, c. 1. Aufl. $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{a+b}{c\sqrt{2}}$. 2. Aufl. $a = \frac{1}{2}\left(a + b \pm \sqrt{2c^2 - (a+b)^2}\right)$; $b = \frac{1}{2}\left(a + b \mp \sqrt{2c^2 - (a+b)^2}\right)$.

2. $a - b$, c. 1. Aufl. $\sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{a-b}{c\sqrt{2}}$. 2. Aufl. $a = \frac{1}{2}\left(a - b + \sqrt{2c^2 - (a-b)^2}\right)$; $b = \frac{1}{2}\left(-(a-b) + \sqrt{2c^2 - (a-b)^2}\right)$.

3. $a^2 - b^2$, c. 1. Aufl. $\cos(\pi - 2\alpha) = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$. 2. Aufl. $a = \sqrt{1/_2 (c^2 + (a^2 - b^2))}$; $b = \sqrt{1/_2 (c^2 - (a^2 - b^2))}$.

4. a, c + b. 1. Aufl. $\cot 1/_2 \alpha = \frac{c + b}{a}$. 2. Aufl. $c = \frac{(c + b)^2 + a^2}{2(c + b)}$; $b = \frac{(c + b)^2 - a^2}{2(c + b)}$.

5. a, c — b. 1. Aufl. $\text{tg}\, 1/_2 \alpha = \frac{c - b}{a}$. 2. Aufl. $c = \frac{a^2 + (c - b)^2}{2(c - b)}$; $b = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2(c - b)}$.

6. p, q. 1. Aufl. $\text{tg}\, \alpha = \sqrt{\frac{p}{q}}$. 2. Aufl. $a = \sqrt{p(p + q)}$; $b = \sqrt{q(p + q)}$.

7. a, p — q. 1. Aufl. Aus $2p = c + p - q$ und $a^2 = cp$ ergiebt sich $c^2 + c(p - q) - 2a^2 = 0$. 2. Aufl. $\sin \alpha^2 - \frac{p - q}{2a} \sin \alpha - 1/_2 = 0$.

8. b, p. 1. Aufl. $\cos \alpha^2 + \frac{p}{b} \cos \alpha - 1 = 0$. 2. Aufl. $q^2 + pq - b^2 = 0$.

b) Die folgenden Aufgaben, in denen ein Aggregat zweier oder dreier Linien und ein Winkel gegeben, sind dadurch zu lösen, daß man das Aggregat durch eine Seite desjenigen rechtwinkligen Dreiecks, dessen Stücke zunächst gegeben sind, und den gegebenen Winkel ausdrückt.

9. c + b, α. Aufl. $c = \frac{c + b}{2 \cos 1/_2 \alpha^2}$.

10. c — b, α. Aufl. $c = \frac{c - b}{2 \sin 1/_2 \alpha^2}$.

11. a + b, α. Aufl. $c = \frac{a + b}{\sqrt{2} \cos(\alpha - 1/_4 \pi)}$.

12. a — b, α. Aufl. $c = \frac{a - b}{\sqrt{2} \sin(\alpha - 1/_4 \pi)}$.

13. $a^2 - b^2$, α. Aufl. $c = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\cos(\pi - 2\alpha)}}$.

14. a + h, α. Aufl. $a = \frac{a + h}{2 \cos 1/_2 \alpha^2}$.

15. a — h, α. Aufl. $a = \frac{a - h}{2 \sin 1/_2 \alpha^2}$.

16. $c + h, \alpha$. Aufl. $c = \frac{2(c+h)}{2 + \sin 2\alpha}$.

17. $c - h, \alpha$. Aufl. $c = \frac{2(c-h)}{2 - \sin 2\alpha}$.

18. $p - q, \alpha$. Aufl. $h = \frac{1}{2}(p - q) \operatorname{tg}(\pi - 2\alpha)$.

19. $a + b + c, \alpha$. Aufl. $c = \frac{a + b + c}{2\sqrt{2} \cos \frac{1}{2}\alpha \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)}$.

20. $a + b - c, \alpha$. Aufl. $c = \frac{a + b - c}{2\sqrt{2} \sin \frac{1}{2}\alpha \sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)}$.

21. $a - b + c, \alpha$. Aufl. $c = \frac{a - b + c}{2\sqrt{2} \sin \frac{1}{2}\alpha \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)}$.

c) In den folgenden Aufgaben ist ein Aggregat der Seiten und die Höhe gegeben.

22. $a + b, h$. 1. Aufl. $\sin 2\alpha^2 - \frac{4h^2}{(a+b)^2} \sin 2\alpha - \frac{4h^2}{(a+b)^2} = 0$, oder $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi)^2 - \frac{h\sqrt{2}}{a+b} \cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2} = 0$. 2. Aufl. $c^2 + 2ch - (a + b)^2 = 0$.

23. $a - b, h$. 1. Aufl. $\sin 2\alpha^2 + \frac{4h^2}{(a-b)^2} \sin 2\alpha - \frac{4h^2}{(a-b)^2} = 0$; oder $\sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi)^2 + \frac{h\sqrt{2}}{a-b} \sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2} = 0$. 2. Aufl. $c^2 - 2hc - (a - b)^2 = 0$.

24. $p - q, h$. 1. Aufl. p und q aus $p - q$ und $pq = h^2$. 2. Aufl. $\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = \frac{2h}{p - q}$.

25. $a + b + c = s, h$, 1. Aufl. $c(\sin\alpha + \cos\alpha + 1) = s$; $c(\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + 1) = s$; $ch = ab = c^2 \sin\alpha \cos\alpha$ oder $2h = c \sin 2\alpha$; mithin $\frac{2h\sqrt{1 + \sin 2\alpha}}{\sin 2\alpha} = s - \frac{2h}{\sin 2\alpha}$, und hieraus $\sin 2\alpha = \frac{4h(s + h)}{s^2}$. 2. Aufl. $h = c \sin\alpha \cos\alpha$; $a + b + c = 2c\sqrt{2} \cos\frac{1}{2}\alpha \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ (siehe 19); $\frac{h}{s} = \sqrt{2} \sin\frac{1}{2}\alpha \sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$; $2 \sin\frac{1}{2}\alpha \sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ $= \cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) - \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{h\sqrt{2}}{s}$ oder $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{h\sqrt{2}}{s}$ $+ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2h + s}{s\sqrt{2}}$.

26. $a + b - c = d, h.$ (Aehnlich wie 25.) 1. Aufl. $\sin 2\alpha = \frac{4h(h-d)}{d^2}$. 2. Aufl. $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{2h-d}{d\sqrt{2}}$.

27. $a - b + c = d, h.$ (Aehnlich wie 25.) 1. Aufl. $\sin 2\alpha = \frac{4h(d-h)}{d^2}$. 2. Aufl. $\sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{d-2h}{d\sqrt{2}}$.

d) In den folgenden Aufgaben ist ein Aggregat der Seiten und der Inhalt gegeben.

28. $a + b, \triangle$. 1. Aufl. Aus $c^2 \sin 2\alpha = 4\triangle$ und $a + b$ ergiebt sich $\sin 2\alpha = \frac{4\triangle}{(a+b)^2 - 4\triangle}$. 2. Aufl. a und b aus $a + b$ und $ab = 2\triangle$.

29. $a - b, \triangle$. 1. Aufl. Wie in 28: $\sin 2\alpha = \frac{4\triangle}{(a-b)^2 + 4\triangle}$. 2. Aufl. a und b aus $a - b$ und $ab = 2\triangle$.

30. $c + h, \triangle$. 1. Aufl. Aus $a^2 \cot \alpha = 2\triangle$ und $c + h$ ergiebt sich $\frac{(c+h)^2 \sin 2\alpha}{(2 + \sin 2\alpha)^2} = \triangle$, und hieraus $\sin 2\alpha^2 - \frac{(c+h)^2 - 4\triangle}{\triangle} \sin 2\alpha + 4 = 0$. Dieselbe Formel würde man für 2β erhalten, daher gilt das eine Vorzeichen für 2α, das andere für 2β. 2. Aufl. c und h aus $c + h$ und $ch = 2\triangle$; $\sin 2\alpha = \frac{2h}{c}$.

31. $c - h, \triangle$. 1. Aufl. Wie in 30: $\sin 2\alpha - \frac{(c-h)^2 + 4\triangle}{\triangle} \sin 2\alpha + 4 = 0$. (Siehe Bemerkung zu 30, 1. Aufl.) 2. Aufl. c und h aus $c - h$ und $ch = 2\triangle$; $\sin 2\alpha = \frac{2h}{c}$.

32. $p - q, \triangle$. Aufl. $\sin 2\alpha^2 + \frac{(p-q)^2}{4\triangle} \sin 2\alpha - 1 = 0$.

33. $a + b + c = s, \triangle$. 1. Aufl. $c(\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + 1) = s$; $2\triangle = ab$, also $4\triangle = c^2 \sin 2\alpha$; mithin $\frac{4\triangle}{\sin 2\alpha} = \frac{s^2}{2 + \sin 2\alpha + 2\sqrt{1 + \sin 2\alpha}}$ oder $8\triangle\sqrt{1 + \sin 2\alpha} = s^2 \sin 2\alpha - 8\triangle - 4\triangle \sin 2\alpha$; beide Seiten quadrirt, giebt $\sin 2\alpha(s^4 - 8\triangle s^2 + 16\triangle^2) = 16\triangle s^2$ oder $\sin 2\alpha = \frac{16\triangle s^2}{(s^2 - 4\triangle)^2}$. 2. Aufl. $s = 2c\sqrt{2} \cos \frac{1}{2}\alpha \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ (siehe 19), also $s^2 = 8c^2 \cos \frac{1}{2}\alpha^2 \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)^2$; $\triangle = 2c^2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha \sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha) \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$;

also $\frac{s^2}{4\triangle} = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)} = \frac{\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) + \cos\frac{1}{4}\pi}{\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) - \cos\frac{1}{4}\pi}$, mithin $\frac{s^2 + 4\triangle}{s^2 - 4\triangle} = \frac{\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi)}{\cos\frac{1}{4}\pi}$; also $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{s^2 + 4\triangle}{\sqrt{2}(s^2 - 4\triangle)}$ (§. 3, 7).

34. $a + b - c = d, \triangle$. 1. Aufl. $\sin 2\alpha = \frac{16\triangle d^2}{(4\triangle - d^2)^2}$. 2. Aufl. $\cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{4\triangle + d^2}{\sqrt{2}(4\triangle - d^2)}$ (§. 3, 7).

35. $a - b + c = d, \triangle$. 1. Aufl. $\sin 2\alpha = \frac{16\triangle d^2}{(4\triangle + d^2)^2}$. 2. Aufl. $\sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi) = \frac{4\triangle - d^2}{\sqrt{2}(4\triangle + d^2)}$ (§. 3, 7).

e) Wenn zwei Aggregate der Seiten gegeben, so erhält man leicht die Seiten aus einer quadratischen Gleichung; außerdem ergeben sich einfache Ausdrücke für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ oder $\cot\frac{1}{2}\alpha$, wie dies an der ersten Aufgabe genauer nachgewiesen ist.

36. $a + c = s$, $b + c = s'$. Aufl. Aus den gegebenen Größen und $a^2 + b^2 = c^2$ ergiebt sich: $c = s + s' - \sqrt{2ss'}$; $a = -s' + \sqrt{2ss'}$; $b = -s + \sqrt{2ss'}$. Mithin $\cos\alpha = \frac{-s + \sqrt{2ss'}}{s + s' - \sqrt{2ss'}}$; $1 - \cos\alpha = \frac{2s + s' - 2\sqrt{2ss'}}{s + s' - \sqrt{2ss'}}$; $1 + \cos\alpha = \frac{s'}{s + s' - \sqrt{2ss'}}$; also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{2s + s' - 2\sqrt{2ss'}}{s + s' - \sqrt{2ss'}} = \frac{(\sqrt{2s} - \sqrt{s'})^2}{s'}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{2s} - \sqrt{s'}}{\sqrt{s'}} = \sqrt{\frac{2s}{s'}} - 1$.

37. $c + a = s$, $c - b = d$. Aufl. $c = s + d - \sqrt{2sd}$; $a = -d + \sqrt{2sd}$; $b = s - \sqrt{2sd}$; $\cot\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2s}{d}} - 1$.

38. $c + a = s, a + b = s'$. Aufl. $a = s' - s + \sqrt{2s(s - s')}$; $c = 2s - s' - \sqrt{2s(s - s')}$; $b = s - \sqrt{2s(s - s')}$; $\cot\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2s}{s - s'}} - 1$.

39. $c + a = s, a - b = d$. Aufl. $a = d - s + \sqrt{2s(s - d)}$; $c = 2s - d - \sqrt{2s(s - d)}$; $b = -s + \sqrt{2s(s - d)}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2s}{s - d}} - 1$.

40. $c - a = d$, $c - b = d'$. Aufl. $a = d' + \sqrt{2dd'}$; $c = d + d' + \sqrt{2dd'}$; $b = d + \sqrt{2dd'}$; $\cot \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2d}{d'}} + 1$.

41. $a + b = s$, $c - a = d$. Aufl. $a = s + d - \sqrt{2d(s+d)}$; $c = s + 2d - \sqrt{2d(s+d)}$; $b = -d + \sqrt{2d(s+d)}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = 1 - \sqrt{\frac{2d}{s+d}}$.

42. $a - b = d$, $c - a = d'$. Aufl. $a = d + d' + \sqrt{2d'(d+d')}$; $c = 2d' + d + \sqrt{2d'(d+d')}$; $b = d' + \sqrt{2d'(d+d')}$; $\cot \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{2d'}{d+d'}} + 1$.

§. 13.

Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck.

Es empfiehlt sich alle Stücke durch die Grundseite b und einen der Winkel α oder β auszudrücken, da sich alsdann fast alle Aufgaben entweder aus den entwickelten Formeln unmittelbar ergeben, oder durch Division zweier Formeln leicht gelöst werden können. Diese Formeln sind folgende:

1. $a = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{b}{2 \cos \alpha}$.

2. $h_a = b \cos \beta = b \sin \alpha$.

3. $h_b = \frac{1}{2} b \cot \beta = \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \alpha$.

4. $r = \frac{b}{2 \sin 2\beta} = \frac{b}{2 \sin 2\alpha}$.

5. $a + h_b = \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} \beta$.

6. $a - h_b = \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta$.

7. $b + h_a = 2 b \cos \frac{1}{2} \beta^2$.

8. $b - h_a = 2 b \sin \frac{1}{2} \beta^2$.

9. $a + b = \frac{b(1 + 2 \sin \beta)}{2 \sin \beta} = \frac{b(1 + 2 \cos \alpha)}{2 \cos \alpha} = \frac{b(\sin \alpha + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha}$
$= \frac{b \sin \frac{3}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{b \sin \frac{3}{2}\alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \alpha}$.

10. $a - b = \frac{b(1 - 2 \sin \beta)}{2 \sin \beta} = \frac{b(1 - 2 \cos \alpha)}{2 \cos \alpha} = \frac{b(\sin \alpha - \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha}$
$= -\frac{b \cos \frac{3}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = -\frac{b \cos \frac{3}{2}\alpha}{2 \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \alpha}$.

11. $h_b + h_a = (a + b) \sin \alpha = (a + b) \cos \beta = \frac{1}{2} b \cot \beta (1 + 2 \sin \beta) = \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \alpha (1 + 2 \cos \alpha) = \frac{b(\sin \alpha + \sin 2\alpha)}{2 \cos \alpha}$
$= \frac{b \sin \frac{3}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha}$.

12. $h_b - h_a = (a - b) \sin \alpha = (a - b) \cos \beta = \frac{1}{2} b \cot \beta (1 - 2 \sin \beta)$
$= \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \alpha (1 - 2 \cos \alpha) = -\frac{b \cos \frac{3}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha}$.

13. $a + h_a = \frac{b(1 + \sin 2\alpha)}{2\cos\alpha} = \frac{b\sin(\frac{1}{4}\pi + \alpha)^2}{\cos\alpha} = \frac{b\cos(\frac{1}{4}\pi - \alpha)^2}{\cos\alpha}$
$= \frac{b(1 + \sin 2\beta)}{2\sin\beta} = \frac{b(\sin\beta + \cos\beta)^2}{2\sin\beta}.$

14. $a - h_a = \frac{b(1 - \sin 2\alpha)}{2\cos\alpha} = \frac{b\sin(\frac{1}{4}\pi - \alpha)^2}{\cos\alpha} = \frac{b\cos(\frac{1}{4}\pi + \alpha)^2}{\cos\alpha}$
$= \frac{b(1 - \sin 2\beta)}{2\sin\beta} = \frac{b(\sin\beta - \cos\beta)^2}{2\sin\beta}.$

15. $b + h_b = \frac{1}{2} b (2 + \cot\beta) = \frac{1}{2} b (2 + \operatorname{tg}\alpha).$

16. $b - h_b = \frac{1}{2} b (2 - \cot\beta) = \frac{1}{2} b (2 - \operatorname{tg}\alpha).$

17. $2a + b = \frac{b(1 + \sin\beta)}{\sin\beta} = \frac{b(1 + \cos\alpha)}{\cos\alpha}.$

18. $2a - b = \frac{b(1 - \sin\beta)}{\sin\beta} = \frac{b(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha}.$

19. $p = a\cos 2\beta = \frac{b\cos 2\beta}{2\sin\beta}.$ 20. $q = b\cos\alpha = b\sin\beta.$

21. $p - q = \frac{b(\cos\beta^2 - 3\sin\beta^2)}{2\sin\beta} = \frac{b(1 - 4\sin\beta^2)}{2\sin\beta} = \frac{b(1 - \cos\alpha^2)}{2\cos\alpha}.$

22. $w_a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha} = \frac{2b\cos\frac{1}{2}\alpha}{4\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - 1}.$

23. $u = \frac{b\sin\frac{1}{2}\alpha}{2\cos\alpha\sin\frac{3}{2}\alpha} = \frac{b\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{5}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{b}{2\cos\alpha(1 + 2\cos\alpha)}$
$= \frac{b}{2\sin\beta(1 + 2\sin\beta)}.$

24. $v = \frac{b\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha} = \frac{b}{4\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - 1} = \frac{b}{1 + 2\cos\alpha} = \frac{b}{1 + 2\sin\beta}.$

25. $u - v = \frac{b(1 - 2\cos\alpha)}{2\cos\alpha(1 + 2\cos\alpha)} = \frac{b(1 - 2\sin\beta)}{2\sin\beta(1 + 2\sin\beta)}.$

26. $t_a^2 = \frac{b^2(1 + 8\sin\beta^2)}{8\sin\beta^2} = \frac{b^2(1 + 8\cos\alpha^2)}{8\cos\alpha^2}.$

27. $\triangle = \frac{1}{4} b^2 \cot\beta = \frac{1}{4} b^2 \operatorname{tg}\alpha.$

28. $\varrho = \frac{1}{2} b \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha.$ 29. $\varrho_b = \frac{1}{2} b \cot\frac{1}{2}\alpha.$

30. $\varrho_b + \varrho = \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{b}{\cos\beta}.$ 31. $\varrho_b - \varrho = b\cot\alpha = b\operatorname{tg}\beta.$

32. $h_b - \varrho = \frac{1}{2} b (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2} b \sin\frac{1}{2}\alpha \left(\frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\right)$
$= \frac{1}{2} b \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha^2 + \sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\cos\alpha} = \frac{b\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{2\cos\alpha}.$

33. $h_b + \varrho_b = \frac{1}{2} b (\operatorname{tg}\alpha + \cot\frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2} b \cot\frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\sin\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha} + 1\right)$
$= \frac{1}{2} b \cot\frac{1}{2}\alpha \frac{(2\sin\frac{1}{2}\alpha^2 + \cos\frac{1}{2}\alpha^2 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2)}{\cos\alpha} = \frac{b\cot\frac{1}{2}\alpha}{2\cos\alpha}.$

a) Die Auflösungen der folgenden Aufgaben, welche ganz einfach sind, ergeben sich unmittelbar aus den vorstehenden Formeln.

1. $a + b, \alpha$	10. v, α	19. $a + h_b, b$
2. $a - b, \alpha$	11. $u - v, \alpha$	20. $a - h_b, b$
3. $a + b, h_b + h_a$	12. t_a, β	21. b, q
4. $a - b, h_b - h_a$	13. ϱ, α	22. b, v
5. p, β	14. ϱ_b, α	23. b, ϱ
6. q, β	15. $\varrho_b + \varrho, \alpha$	24. b, ϱ_b
7. $p - q, \alpha$	16. $\varrho_b - \varrho, \alpha$	25. $b, \varrho_b + \varrho$
8. w_a, α	17. $h_b - \varrho, \alpha$	26. $b, \varrho_b - \varrho$.
9. u, α	18. $h_b + \varrho_b, \alpha$	

b) Die Auflösungen der folgenden Aufgaben sind ebenfalls einfach, werden aber durch Division zweier Formeln erhalten.

27. $\triangle, h_b$. Aufl. $\operatorname{tg} \beta = \frac{\triangle}{h_b^2}$.

28. $\triangle, h_a$. Aufl. $\sin 2\beta = \frac{h_a^2}{2\triangle}$.

29. $a + h_b, b + h_a$. Aufl. $\sin \beta = \frac{b + h_a}{2(a + h_b)}$.

30. $a - h_b, b - h_a$. Aufl. $\sin \beta = \frac{b - h_a}{2(a - h_b)}$.

31. $a, \varrho_b + \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \beta = \frac{\varrho_b + \varrho}{2a}$.

32. $a, h_b - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{h_b - \varrho}{a}$.

33. $a, h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha = \frac{h_b + \varrho_b}{a}$.

34. r, h_b. Aufl. $\cos 2\beta = \frac{h_b - r}{r}$.

35. ϱ, h_b. Aufl. $\cos \alpha = \frac{\varrho}{h_b - \varrho}$.

36. ϱ_b, h_b. Aufl. $\cos \alpha = \frac{\varrho_b}{h_b + \varrho_b}$.

37. $\varrho_b - \varrho, h_b$. Aufl. $\cos 2\alpha = \frac{\varrho_b - \varrho - 2h_b}{\varrho_b - \varrho + 2h_b}$.

38. h_a, ϱ. Aufl. $\cos \alpha = \frac{h_a - 2\varrho}{2\varrho}$.

39. h_a, ϱ_b. Aufl. $\cos \alpha = \frac{2\varrho_b - h_a}{2\varrho_b}$.

40. $h_a, \varrho_b + \varrho$. Aufl. $\cos 2\alpha = \frac{\varrho_b + \varrho - 2h_a}{\varrho_b + \varrho}$.

41. h_a, w_a. Aufl. $\sin {}^3/_2\, \alpha = \frac{h_a}{w_a}$.

42. $\rho_b - \rho$, $\triangle$. Aufl. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\frac{4 \triangle}{(\varrho_b - \varrho)^2}}$.

43. $a + b$, $p - q$. Aufl. $\cos \alpha = \frac{a + b - (p - q)}{2 (a + b)}$.

44. $a - b$, $p - q$. Aufl. $\cos \alpha = \frac{p - q - (a - b)}{2 (a - b)}$.

45. $a + b$, u. Aufl. $\cos \alpha = {}^1/_2 \left(\sqrt{\frac{a + b}{u}} - 1\right)$.

46. $a - b$, u. Aufl. $\cos 2 \alpha = - \frac{u + 2 (a - b)}{2 u}$.

47. $a - b$, $u - v$. Aufl. $\frac{a - b - (u - v)}{2 (u - v)}$.

48. $h_b - h_a$, u. Aufl. $\sin 3 \alpha = - \frac{h_b - h_a}{u}$.

49. $a + h_b$, $\varrho_b - \varrho$. Aufl. $\cos \beta = \frac{2 (a + h_b)}{2 (a + h_b) + \varrho_b - \varrho}$.

50. $2 a - b$, ϱ. Aufl. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 a - b}{2 \varrho}$.

51. $2 a + b$, ϱ_b. Aufl. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 a + b}{2 \varrho_b}$.

52. $2 a - b$, $h_b - \varrho$. Aufl. $\sin \alpha = \frac{2 a - b}{2 (h_b - \varrho)}$.

53. $2 a + b$, $h_b + \varrho_b$. Aufl. $\sin \alpha = \frac{2 a + b}{2 (h_b + \varrho_b)}$.

54. r, $\varrho_b + \varrho$. Aufl. $\cos \alpha = \frac{\varrho_b + \varrho}{4 r}$.

55. r, $\varrho_b - \varrho$. Aufl. $\cos 2 \beta = \frac{2 r - (\varrho_b - \varrho)}{2 r}$.

56. r, $h_b - \varrho$. Aufl. $\cos \alpha = \frac{2 r - (h_b - \varrho)}{2 r}$.

57. r, $h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cos \alpha = \frac{h_b + \varrho_b - 2 r}{2 r}$.

58. r, $p - q$. Aufl. $\sin 3 \alpha = - \frac{p - q}{2 r}$.

59. ϱ, ϱ_b. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \alpha = \sqrt{\frac{\varrho}{\varrho_b}}$ und $b = 2 \sqrt{\varrho \varrho_b}$.

60. q, $\varrho_b + \varrho$. Aufl. $\sin 2 \alpha = \frac{2 q}{\varrho_b + \varrho}$.

61. $q, \varrho_b - \varrho$. Aufl. $\sin\alpha = \frac{q}{\varrho_b - \varrho}$.

62. $h_b - \varrho, h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cos\alpha = \frac{h_b + \varrho_b - (h_b - \varrho)}{h_b + \varrho_b + (h_b - \rho)}$.

63. w_a, v. Aufl. $\cos {}^1/_2\, \alpha = \frac{w_a}{2v}$.

64. $p - q, u - v$. Aufl. $\cos\alpha = {}^1/_2 \left(\sqrt{\frac{p-q}{u-v}} = 1\right)$.

c) Die folgenden Aufgaben, welche sich unmittelbar aus den oben aufgestellten Formeln ergeben, führen auf quadratische Gleichungen.

65. b, p. Aufl. $\sin\beta^2 + \frac{p}{b}\sin\beta - {}^1/_2 = 0$.

66. $b, p - q$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{p-q}{2b}\cos\alpha - {}^1/_4 = 0$.

67. b, w_a. Aufl. $\cos {}^1/_2\, \alpha^2 - \frac{b}{2 w_a}\cos {}^1/_2\, \alpha - {}^1/_4 = 0$.

68. b, u. Aufl. $\cos\alpha^2 + {}^1/_2 \cos\alpha - \frac{b}{4u} = 0$.

69. $b, u - v$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{u - v + b}{2(u-v)}\cos\alpha - \frac{b}{4(u-v)} = 0$.

d) Die folgenden Aufgaben, welche auf quadratische Gleichungen führen, sind dadurch zu lösen, daß die für die beiden gegebenen Elemente oben aufgestellten Formeln dividirt werden.

70. $a + h_a, \triangle$. 1. Aufl. a und h_a zu finden aus $a + h_a$ und $ah_a = 2\triangle$. 2. Aufl. $\sin 2\beta - \frac{a + h_a}{\sqrt{2\triangle}}\sqrt{\sin 2\beta} + 1 = 0$.

71. $a - h_a, \triangle$. 1. Aufl. wie 70. 2. Aufl. $\sin 2\beta + \frac{a - h_a}{\sqrt{2\triangle}}\sqrt{\sin 2\beta} - 1 = 0$.

72. $b + h_b, \triangle$. 1. Aufl. wie 70. 2. Aufl. $\cot\beta - \frac{b + h_b}{\sqrt{\triangle}}\sqrt{\cot\beta} + 2 = 0$.

73. $b - h_b, \triangle$. 1. Aufl. wie 70. 2. Aufl. $\cot\beta + \frac{b - h_b}{\sqrt{\triangle}}\sqrt{\cot\beta} - 2 = 0$.

74. $a, \varrho_b - \varrho$. Aufl. $\cos\beta^2 + \frac{\varrho_b - \varrho}{2a}\cos\beta - 1 = 0$.

75. $h_b, \varrho_b + \varrho$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{2h_b}{\varrho_b + \varrho}\cos\alpha - 1 = 0$.

76. h_b, p. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{p}{2\,h_b}\cos\beta - \frac{1}{2} = 0.$

77. h_b, q. Aufl. $\sin\alpha^2 + \frac{q}{2\,h_b}\sin\alpha - 1 = 0.$

78. h_b, p — q. Aufl. $\sin\alpha^2 - \frac{p-q}{4\,h_b}\sin\alpha - \frac{3}{4} = 0.$

79. h_a, $\varrho_b - \varrho$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{h_a}{\varrho_b - \varrho}\cos\alpha - 1 = 0.$

80. h_a, $h_b - \varrho$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \cos\alpha - \frac{h_a}{2\,(h_b - \varrho)} = 0.$

81. h_a, $h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \cos\alpha + \frac{h_a}{2\,(h_b + \varrho_b)} = 0.$

82. p, $\triangle$. Aufl. $\sin 2\beta^2 + \frac{p^2}{2\triangle}\sin 2\beta - 1 = 0.$

83. a + b, t_a. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{t_a^2}{(a+b)^2 - t_a^2}\cos\alpha + \frac{(a+b)^2 - 2\,t_a^2}{8\,\{(a+b)^2 - t_a^2\}} = 0.$

84. a — b, t_a. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{t_a^2}{t_a^2 - (a-b)^2}\cos\alpha + \frac{2\,t_a^2 - (a-b)^2}{8\,\{t_a^2 - (a-b)^2\}} = 0.$

85. a + b, p. Aufl. $\sin\beta^2 + \frac{p}{a+b}\sin\beta - \frac{a+b-p}{2\,(a+b)} = 0.$

86. a — b, p. Aufl. $\sin\beta^2 - \frac{p}{a-b}\sin\beta - \frac{a-b-p}{2\,(a-b)} = 0.$

87. a + b, q. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{q}{a+b}\cos\alpha - \frac{q}{2\,(a+b)} = 0.$

88. a — b, q. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{q}{a-b}\cos\alpha - \frac{q}{2\,(a-b)} = 0.$

89. a + b, u — v. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{a+b+2\,(u-v)}{2\,(u-v)}\cos\alpha - \frac{a+b-(u-v)}{4\,(u-v)} = 0.$

90. $h_b + h_a$, ϱ. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{3\,\varrho - (h_b + h_a)}{2\,\varrho}\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0.$

91. $h_b - h_a$, ϱ. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{h_b - h_a + \varrho}{2\,\varrho}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0.$

92. $h_b + h_a$, ϱ_b. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{h_b + h_a - \varrho_b}{2\,\varrho_b}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0.$

93. $h_b - h_a, \varrho_b$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{h_b - h_a + 3\varrho_b}{2\varrho_b}\cos\alpha + {}^1/_2 = 0$.

94. $h_b + h_a, h_b - \varrho$. Aufl. $\cos\alpha^2 + {}^3/_2\cos\alpha - {}^1/_2\left(\frac{h_b + h_a}{h_b - \varrho} - 1\right) = 0$.

95. $h_b - h_a, h_b - \varrho$. Aufl. $\cos\alpha^2 - {}^1/_2\cos\alpha + {}^1/_2\left(\frac{h_b - h_a}{h_b - \varrho} - 1\right) = 0$.

96. $h_b + h_a, h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cos\alpha^2 - {}^1/_2\cos\alpha + {}^1/_2\left(\frac{h_b + h_a}{h_b + \varrho_b} - 1\right) = 0$.

97. $h_b - h_a, h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cos\alpha^2 - {}^3/_2\cos\alpha + {}^1/_2\left(1 - \frac{h_b - h_a}{h_b + \varrho_b}\right) = 0$.

98. $r, a + h_b$. Aufl. $\cos\beta^2 + \cos\beta - \frac{a + h_b}{2r} = 0$.

99. $r, a - h_b$. Aufl. $\cos\beta^2 - \cos\beta + \frac{a - h_b}{2r} = 0$.

100. $b + h_b, \varrho_b - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha^2 + 2\operatorname{tg}\alpha - \frac{2(b + h_b)}{\varrho_b - \varrho} = 0$.

101. $b - h_b, \varrho_b - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha^2 - 2\operatorname{tg}\alpha + \frac{2(b - h_b)}{\varrho_b - \varrho} = 0$.

102. $2a + b, t_a$. Aufl. $\sin\beta^2 - \frac{2t_a^2}{(2a + b)^2 - t_a^2}\sin\beta + \frac{(2a + b)^2 - 8t_a^2}{8\{(2a + b)^2 - t_a^2\}} = 0$.

103. $2a + b, p$. Aufl. $\sin\beta^2 + \frac{p}{2a + b}\sin\beta - \frac{2a + b - 2p}{2(2a + b)} = 0$.

104. $2a - b, p$. Aufl. $\sin\beta^2 - \frac{p}{2a - b}\sin\beta + \frac{2p - (2a - b)}{2(2a - b)} = 0$.

105. $2a + b, q$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{q}{2a + b}\cos\alpha - \frac{q}{2a + b} = 0$.

106. $2a - b, q$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{q}{2a - b}\cos\alpha - \frac{q}{2a - b} = 0$.

107. $2a + b, p - q$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{p - q}{2(2a + b)}\cos\alpha + \frac{2(p - q) - (2a + b)}{4(2a + b)} = 0$.

108. $2a - b, p - q$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{p - q}{2(2a - b)}\cos\alpha + \frac{2(p - q) - (2a - b)}{4(2a - b)} = 0$.

109. $2a + b, u$. Aufl. $\cos\alpha^2 + {}^3/_2\cos\alpha - \frac{2a + b - u}{2u} = 0$.

110. $2a + b, v$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(3 - \frac{2a + b}{v}\right)\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0$.

111. $2a + b, u - v$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(3 + \frac{2a + b}{u - v}\right)\cos\alpha + \frac{1}{2} - \frac{2a + b}{4(u - v)} = 0$.

112. $2a - b, u$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{2a - b - u}{2u} = 0$.

113. $2a - b, v$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \left(\frac{2a - b}{2v} - \frac{1}{2}\right)\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$.

114. $2a - b, u - v$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{2a - b + u - v}{2(u - v)}\cos\alpha + \frac{2a - b - 2(u - v)}{4(u - v)} = 0$.

115. r, t_a. Aufl. $\cos 2\beta^2 - \frac{1}{4}\cos 2\beta + \frac{t_a^2 - 5r^2}{4r^2} = 0$.

116. r, ϱ. Aufl. $\cos\alpha^2 - \cos\alpha + \frac{\varrho}{2r} = 0$.

117. r, ϱ_b. Aufl. $\cos\alpha^2 + \cos\alpha - \frac{\varrho_b}{2r} = 0$.

118. w_a, ϱ_b. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{\varrho_b}{w_a}\sin\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4} = 0$.

119. $\varrho_b, h_b - \varrho$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{\varrho_b + h_b - \varrho}{h_b - \varrho}\cos\alpha - \frac{\varrho_b}{h_b - \varrho} = 0$.

120. $\varrho, h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{h_b + \varrho_b - \varrho}{h_b + \varrho_b}\cos\alpha + \frac{\varrho}{h_b + \varrho_b} = 0$.

121. $\varrho_b - \varrho, h_b - \varrho$. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{\varrho_b - \varrho}{2(h_b - \varrho)}\cos\alpha - \frac{\varrho_b - \varrho}{2(h_b - \varrho)} = 0$.

122. $\varrho_b - \varrho, h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cos\alpha^2 - \frac{\varrho_b - \varrho}{2(h_b + \varrho_b)}\cos\alpha - \frac{\varrho_b - \varrho}{2(h_b + \varrho_b)} = 0$.

123. q, v. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{q}{2v} = 0$.

e) Die folgenden Aufgaben führen auf Gleichungen, welche durch Einführung eines Hülfswinkels nach §. 3, 1 zu lösen sind.

124. $a, b + h_b$. Aufl. $2a\sin\beta + a\cos\beta = b + h_b$.

125. $a, b - h_b$. Aufl. $2a\sin\beta - a\cos\beta = b - h_b$.

126. $a + b, h_b$. Aufl. $(a + b)\cos\beta - 2h_b\sin\beta = h_b$.

127. $a - b, h_b$. Aufl. $(a - b)\cos\beta + 2h_b\sin\beta = h_b$.

128. $h_a, p - q$. Aufl. $2h_a\cos 2\beta - (p - q)\sin 2\beta = h_a$.

129. $t_a, \triangle$. Aufl. $t_a^2\sin 2\beta + 4\triangle\cos 2\beta = 5\triangle$.

130. $p - q, h_b + h_a$. Aufl. $(p - q)\sin\alpha + 2(h_b + h_a)\cos\alpha = h_b + h_a$.

131. $p - q$. $h_b - h_a$. Aufl. $(p - q)\sin\alpha - 2(h_b - h_a)\cos\alpha = h_b - h_a$.

132. $a + h_a$, p. Aufl. $(a + h_a)\cos 2\beta - p\sin 2\beta = p$ oder $\cot(\frac{1}{4}\pi - \beta) = \frac{a + h_a}{p}$.

133. $a - h_a$, p. Aufl. $p\sin 2\beta + (a - h_a)\cos 2\beta = p$ oder $\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \beta) = \frac{a - h_a}{p}$.

134. $a + h_a$, $p - q$. Aufl. $2(a + h_a)\cos 2\beta - (p - q)\sin 2\beta = a + h_a + p - q$.

135. $a - h_a$, $p - q$. Aufl. $2(a - h_a)\cos 2\beta + (p - q)\sin 2\beta = a - h_a + p - q$.

136. r, u. Aufl. $2r\sin\alpha - 2u\cos\alpha = u$.

137. $\varrho_b + \varrho$, v. Aufl. $(\varrho_b + \varrho)\sin\alpha - 2v\cos\alpha = v$.

f) Die Gleichungen, auf welche die folgenden Aufgaben führen, sind nach den §§. 6 und 7 zu lösen.

138. $a + h_b$, ϱ. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta = \frac{a + h_b}{\varrho}$; $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4}\pi$ (§. 6, 7).

139. $a - h_b$, ϱ. Aufl. $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta} = \frac{\varrho}{a - h_b}$; $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4}\pi$ (§. 6, 9).

140. $a + h_b$, ϱ_b. Aufl. $\frac{\cot\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{2}\beta} = \frac{\varrho_b}{a + h_b}$; $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4}\pi$ (§. 6, 9).

141. $a - h_b$, ϱ_b. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{a - h_a}{\varrho_b}$; $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4}\pi$ (§. 6, 7).

142. $a + h_a$, q. Aufl. $\frac{\sin\beta}{\cos(\frac{1}{4}\pi - \beta)} = \sqrt{\frac{q}{a + h_a}}$; $\beta + \frac{1}{4}\pi - \beta = \frac{1}{4}\pi$ (§. 7, 3).

143. $a - h_a$, q. Aufl. $\frac{\sin\beta}{\sin(\frac{1}{4}\pi - \beta)} = \sqrt{\frac{q}{a - h_a}}$; $\beta + \frac{1}{4}\pi - \beta = \frac{1}{4}\pi$ (§. 7, 1).

g) Zur Lösung der folgenden Aufgaben, in welchen t_a eins der gegebenen Elemente, ist noch eine besondere Construction zu machen. Es sei $AD = t_a$, $AF = h_a$, $CG = h_b$; von D sei auf AC das Loth $DE = \frac{1}{2}h_a$, und von D auf AB das Loth $DH = \frac{1}{2}h_b$ gefällt.

144. h_a, t_a. Aufl. $\sin CAD = \frac{h_a}{2t_a}$, $\sin ADB = \frac{h_a}{t_a}$, $2\beta = \angle ADB - CAD$.

145. h_b, t_a. Aufl. $\sin DAB = \frac{h_b}{2t_a}$ (1); $\operatorname{tg}\alpha = \frac{DH}{BH}$, $\operatorname{tg} DAB = \frac{DH}{AH}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AH\operatorname{tg}DAB}{BH} = 3\operatorname{tg}DAB$ (2).

146. b, t_a. 1. Aufl. Aehnlich wie 144. $\cos DAB = \frac{3b}{4t_a}$, $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} DAH$. 2. Aufl. $\sin \beta = \frac{b}{2\sqrt{2(t_a^2 - b^2)}}$. 3. Aufl. folgt aus Formel 26.

147. a, t_a. Aufl. Aus $\triangle$ ADC folgt $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{(t_a + \frac{1}{2}a)(t_a - \frac{1}{2}a)}{(\frac{3}{2}a + t_a)(\frac{3}{2}a - t_a)}}$.

§. 14.

Dreiecks-Aufgaben, wenn r, a, b, c, a + b, a — b, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, s — a, s — b, s — c, h_a, h_b, h_c, $h_b + h_a$, $h_b - h_a$, p, q, p — q, w_c, u, v, u — v, t_c, $\triangle$, $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$, ab gegebene Elemente sind, und wenn dieselben nicht unmittelbar auf einen der vier Hauptfälle führen.

Zur Lösung der hierher gehörenden Aufgaben sind die obengenannten Stücke durch r und die Winkel ausgedrückt, namentlich durch γ und $\delta = \alpha - \beta$.

1. $a = 2r \sin \alpha$.
2. $b = 2r \sin \beta$.
3. $c = 2r \sin \gamma$.
4. $a + b = 2r(\sin \alpha + \sin \beta) = 4r \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\delta$.
5. $a - b = 2r(\sin \alpha - \sin \beta) = 4r \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta$.
6. $s = 4r \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma = 2r \cos \frac{1}{2}\gamma (\cos \frac{1}{2}\delta + \sin \frac{1}{2}\gamma)$.
7. $s - a = 4r \cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma = 2r \sin \frac{1}{2}\gamma (\cos \frac{1}{2}\gamma - \sin \frac{1}{2}\delta)$.
8. $s - b = 4r \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma = 2r \sin \frac{1}{2}\gamma (\cos \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\delta)$.
9. $s - c = 4r \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma = 2r \cos \frac{1}{2}\gamma (\cos \frac{1}{2}\delta - \sin \frac{1}{2}\gamma)$.
10. $h_a = 2r \sin \beta \sin \gamma$.
11. $h_b = 2r \sin \alpha \sin \gamma$.
12. $h_c = 2r \sin \alpha \sin \beta = r(\cos \delta + \cos \gamma) = 2r(\cos \frac{1}{2}\delta^2 - \sin \frac{1}{2}\gamma^2) = 2r(\cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \sin \frac{1}{2}\delta^2)$.
13. $h_b + h_a = 2r \sin \gamma (\sin \alpha + \sin \beta) = 8r \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma^2 \cos \frac{1}{2}\delta = 4r \cos \frac{1}{2}\gamma^2 (\cos \alpha + \cos \beta)$.
14. $h_b - h_a = 2r \sin \gamma (\sin \alpha - \sin \beta) = 8r \sin \frac{1}{2}\gamma^2 \cos \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta = 4r \sin \frac{1}{2}\gamma^2 (\cos \beta - \cos \alpha)$.
15. $p = 2r \sin \alpha \cos \beta = r(\sin \gamma + \sin \delta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$.

16. $q = 2r \cos\alpha \sin\beta = r(\sin\gamma - \sin\delta) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

17. $p - q = 2r \sin\delta$. Ist $\alpha > \frac{1}{2}\pi$, so wird q außerhalb des Dreiecks fallen und ist daher negativ zu nehmen. Zu beachten ist, daß $\frac{p+q}{p-q} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}$.

18. $w_c = \frac{h_c}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{2r(\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2)}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{2r(\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2)}{\cos\frac{1}{2}\delta}$
$= \frac{r(\cos\gamma + \cos\delta)}{\cos\frac{1}{2}\delta}$.

19. $u = \frac{2r\sin\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{w_c\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\beta}$.

20. $v = \frac{2r\sin\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{w_c\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\alpha}$.

21. $u - v = 4r\sin\frac{1}{2}\gamma^2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta$.

22. $(a - b)^2 = (p - q)(u - v)$.

23. $t_c^2 = r^2(1 + 2\cos\delta\cos\gamma + \cos\gamma^2)$.

24. $\triangle = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma} = 2r^2\sin\alpha\sin\beta$
$\sin\gamma = r^2\sin\gamma(\cos\gamma + \cos\delta) = 2r^2\sin\gamma(\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2) =$
$2r^2\sin\gamma(\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2) = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\cot\gamma} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.

25. $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos\gamma = c^2 + 4\triangle\cot\gamma = \frac{1}{2}c^2 + 2t_c^2 =$
$4r^2(\sin\alpha^2 + \sin\beta^2) = 2r^2(2 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta) =$
$4r^2(1 + \cos\gamma\cos\delta)$.

26. $a^2 - b^2 = 4r^2\sin\gamma\sin\delta = p^2 - q^2 = c(p - q)$.

27. $a^2 + b^2 - c^2 = 8r^2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 4r^2\cos\gamma(\cos\gamma + \cos\delta)$
$= 8r^2\cos\gamma(\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2) = 8r^2\cos\gamma(\cos\frac{1}{2}\gamma^2 -$
$\sin\frac{1}{2}\delta^2) = 2ab\cos\gamma = 4\triangle\cot\gamma = 2t_c^2 - \frac{1}{2}c^2$.

28. $ab = 4r^2\sin\alpha\sin\beta = 2r^2(\cos\gamma + \cos\delta) = 4r^2(\cos\frac{1}{2}\gamma^2 -$
$\sin\frac{1}{2}\delta^2) = 4r^2(\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2) = \frac{2\triangle}{\sin\gamma}$.

Außer diesen Formeln werden auch diejenigen benutzt werden, welche zur directen Berechnung des Dreiecks in den vier Hauptfällen dienen, daher sie hier auch noch angeführt werden.

29. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$.

30. $(a + b)\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = c\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ oder $(a + b)$
$\sin\frac{1}{2}\gamma = c\cos\frac{1}{2}\delta$.

31. $(a - b) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = c \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ oder $(a - b) \cos \frac{1}{2} \gamma = c \sin \frac{1}{2} \delta$.

32. $\frac{a + b}{a - b} = \frac{tg \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{tg \frac{1}{2} (\alpha - \beta)} = \cot \frac{1}{2} \gamma \cot \frac{1}{2} \delta$.

33. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

34. $\sin \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b + c - a)(a - b + c)}{ab}}$.

35. $\cos \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{s (s - c)}{ab}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a + b + c)(a + b - c)}{ab}}$.

36. $tg \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{s (s - c)}} = \sqrt{\frac{(-a + b + c)(a - b + c)}{(a + b + c)(a + b - c)}}$.

Anmerkung. Die meisten derjenigen Aufgaben, in denen Seiten halbirende Transversalen oder durch diese bedingte Winkel gegeben, sind in einem besonderen Paragraphen behandelt; nur einige, welche mit den hier angeführten in unmittelbarem Zusammenhang stehen, sind an dieser Stelle aufgenommen. In Bezug auf diese sei bemerkt, daß t_c, h_c und $\frac{1}{2} (p - q)$ von einander abhängige Stücke sind, indem $t_c^2 = h_c^2 + \frac{1}{4} (p - q)^2$ ist; und daß man dadurch, daß man t_c um sich selber verlängert, ein Dreieck erhält, dessen Seiten $2 t_c$, a und b sind, und in welchem $2 t_c$ der Winkel $\pi - \gamma$ gegenüberliegt.

A) Unter den gegebenen Stücken befinden sich zwei Winkel; durch die aufgestellten Formeln ist leicht r zu berechnen, und durch r und die Winkel wiederum die Seiten.

1. $a + b, \alpha, \beta$	6. $h_b - h_a, \alpha, \beta$	11. $a^2 + b^2, \alpha, \beta$
2. $a - b, \alpha, \beta$	7. $p - q, \alpha, \beta$	12. $a^2 - b^2, \alpha, \beta$
3. s, α, β	8. u, α, β	13. $a^2 + b^2 - c^2, \alpha, \beta$
4. $s - c, \alpha, \beta$	9. $u - v, \alpha, \beta$	14. ab, α, β
5. $h_b + h_a, \alpha, \beta$	10. $\triangle, \alpha, \beta$	

B) Unter den gegebenen Stücken befindet sich ein Winkel. In der Regel sind diese Aufgaben dadurch zu lösen, daß aus den für die beiden gegebenen Stücke oben aufgestellten Formeln r durch Division eliminirt wird, obwohl einzelne Aufgaben unter Berücksichtigung ihrer geometrischen Beziehungen eine einfachere Auflösung gestatten; man findet dann stets die Winkel, so daß die Aufgaben auf die entsprechenden unter A) zurückgeführt sind. In vielen Aufgaben findet man die Summe oder die Differenz oder das Product oder den Quotienten zweier trigonometrischer Functionen; außerdem kennt man noch die Summe oder die Differenz der Winkel, so daß die Aufgaben auf die von §. 4 bis 9 zurückzuführen sind; bei einigen dieser letzteren Aufgaben ist zu beachten, daß 1) $\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \alpha$;

2) $\beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\delta$; 3) $\beta + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma$;
4) $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - \beta$; 5) $\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$;
6) $\alpha + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\delta$; 7) $\alpha - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma$.

Diejenigen Aufgaben, welche auf quadratische Gleichungen führen, sind noch besonders hervorgehoben.

a) In den folgenden Aufgaben ist **r** eins der gegebenen Stücke. Die Aufgaben 49 und 50 führen auf quadratische Gleichungen. Außer **r** ist noch gegeben:

15. $a + b, \alpha$
16. $a - b, \alpha$
17. $a^2 + b^2, \alpha$
18. $a^2 - b^2, \alpha$
19. ab, α
20. $a + b, \gamma$
21. s, γ (20)
22. $s - c, \gamma$ (20)
23. $a + b, \delta$
24. $a - b, \gamma$
25. $s - c, \alpha$ (24)
26. $a - b, \delta$
27. $h_b + h_a, \gamma$
28. $h_b - h_a, \gamma$
29. $p - q, \alpha$
30. $p - q, \gamma$
31. w_c, δ
32. $u - v, \gamma$
33. $u - v, \delta$
34. $a^2 + b^2, \gamma$
35. $a^2 + b^2, \delta$
36. $a^2 - b^2, \gamma$
37. $a^2 - b^2, \delta$
38. $a^2 + b^2 - c^2, \gamma$
39. ab, γ
40. ab, δ
41. h_c, γ
42. h_c, δ
43. p, γ
44. p, δ
45. $\triangle, \gamma$
46. u, α (§. 7, 4)
47. u, γ (§. 7, 4)
48. u, δ (§. 6, 1)
49. w_c, γ
50. $a^2 + b^2 - c^2, \delta$.

b) In den folgenden Aufgaben, von denen 75, 76 und 77 auf quadratische Gleichungen führen, ist **c** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

51. $a + b, \gamma$
52. $a + b, \delta$
53. $a - b, \gamma$
54. $a - b, \delta$
55. $h_b + h_a, \gamma$
56. $h_b + h_a, \delta$
57. $h_b - h_a, \gamma$
58. $h_b - h_a, \delta$
59. $\triangle, \alpha$
60. $a^2 + b^2, \alpha$
61. $a^2 + b^2, \gamma$
62. $a^2 - b^2, \gamma$
63. $a^2 - b^2, \delta$
64. ab, γ
65. h_c, γ (§. 3, 2)
66. h_c, δ (§. 3, 1)
67. w_c, δ (§. 3, 1)
68. $\triangle, \gamma$ (§. 3, 2)
69. $\triangle, \delta$ (§. 3, 1)
70. $a + b, \alpha$ (§. 7, 4)
71. $a - b, \alpha$ (§. 7, 4)
72. $h_b + h_a, \alpha$ (§. 6, 6)
73. $h_b - h_a, \alpha$ (§. 6, 2)
74. $a^2 - b^2, \alpha$ (§. 7, 2)
75. w_c, γ
76. $a^2 + b^2, \delta$
77. ab, δ.

c) In den folgenden Aufgaben ist **a** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

78. b, δ
79. $h_b + h_a, \gamma$ (suche $a + b$)
80. $h_b - h_a, \gamma$ (suche $a - b$)
81. $p - q, \alpha$
82. $p - q, \delta$
83. $p - q, \beta$ (§. 7, 2)
84. u, α (§. 7, 4).

d) In den folgenden Aufgaben ist **a + b** eins der gegebenen Elemente. In den Aufgaben 94 bis 96, in denen t_c oder durch t_c bedingte Winkel gegeben, ist t_a um sich selber zu verlängern und das so erhaltene Dreieck aufzulösen. In den Aufgaben 101 bis 104 sind

a und b aus quadratischen Gleichungen zu berechnen; die Aufgaben 105 bis 110 führen auf quadratische Gleichungen. Außer **a + b** ist noch gegeben:

85. $h_b + h_a$, α
86. $h_b + h_a$, δ
87. $h_b - h_a$, γ
88. $h_b - h_a$, δ
89. w_c, γ
90. $p - q$, γ
91. $p - q$, δ
92. $\triangle$, γ
93. $a^2 + b^2 - c^2$, γ
94. t_c, γ (51)
95. t_c, γ_2 (70)
96. h_a, γ_2 (70)
97. $s - a$, γ (§. 3, 1)
98. h_a, δ (§. 6, 1)
99. h_a, β (§. 7, 4)
100. $p - q$, α (§. 7, 4)
101. $a^2 + b^2$, γ
102. $a^2 + b^2$, δ
103. ab, γ
104. ab, δ
105. h_c, γ
106. h_c, δ
107. w_c, δ
108. $u - v$, γ
109. $u - v$, δ
110. $a^2 + b^2 - c^2$, δ.

e) In den folgenden Aufgaben ist **a — b** eins der gegebenen Elemente. In den Aufgaben 122 bis 124 ist t_c gegeben; in denselben ist zunächst ein Dreieck aufzulösen, welches man erhält, wenn man t_c um sich selber verlängert. In den Aufgaben 133 bis 136 sind a und b aus einer quadratischen Gleichung zu berechnen; die Aufgaben 137 bis 140 führen auf quadratische Gleichungen.

111. $h_b + h_a$, γ
112. $h_b + h_a$, δ
113. $h_b - h_a$, α
114. $h_b - h_a$, δ
115. $p - q$, γ
116. $p - q$, δ
117. u, α
118. $u - v$, γ
119. $u - v$, δ
120. $\triangle$, γ
121. $a^2 + b^2 - c^2$, γ
122. t_c, γ
123. t_c, γ_2
124. h_a, γ_2
125. s, γ (§. 3, 1)
126. $s - c$, γ (§. 3, 1)
127. w_c, γ (§. 3, 1)
128. h_a, δ (§. 6, 3)
129. h_a, β (§. 7, 3)
130. $p - q$, α (§. 7, 4)
131. $u - v$, α (§. 7, 4)
132. u, β (§. 7, 2)
133. $a^2 + b^2$, γ
134. $a^2 + b^2$, δ
135. ab, γ
136. ab, δ
137. h_c, γ
138. h_c, δ
139. w_c, δ
140. $a^2 + b^2 - c^2$, δ.

f) In den folgenden Aufgaben sind zwei Aggregate je zweier Seiten und ein Winkel gegeben.

141. $a + c = s$, $b + c = s'$, γ. Aufl. $c(\sin\alpha + \sin\gamma) = s\sin\gamma$ und $c(\sin\beta + \sin\gamma) = s'\sin\gamma$; also $\frac{\sin\alpha + \sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma} = \frac{s}{s'}$ und hieraus $\frac{\sin\alpha + \sin\beta + 2\sin\gamma}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{s + s'}{s - s'}$ oder

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \sin\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{s + s'}{s - s'} \text{ oder } \frac{s + s'}{s - s'}$$

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 2\sin\frac{1}{2}\gamma$, woraus $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ nach §. 3, 1 zu berechnen ist. Oder es ist $s'\sin\alpha - s\sin\beta = (s - s')\sin\gamma$ und $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ daher α und β nach §. 3, 3 zu berechnen.

142. $a - c = d$, $b + c = s$, γ. Aufl. $\sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) + \frac{s - d}{s + d} \cot \tfrac{1}{2}\gamma \cot \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = 2 \cos \tfrac{1}{2}\gamma$ (§. 3, 1). Oder $s \sin \alpha - d \sin \beta = (s + d) \sin \gamma$ und $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ (§. 3, 3).

143. $a - c = d$, $b - c = d'$, γ. Aufl. $\cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) - \frac{d + d'}{d - d'} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = 2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma$ (§. 3, 1). Oder $d' \sin \alpha - d \sin \beta = (d' - d) \sin \gamma$ und $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ (§. 3, 3).

g) In den folgenden Aufgaben, von denen 153 auf eine quadratische Gleichung führt, ist **s** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

144. $h_b + h_a$, γ
145. w_c, γ
146. $\triangle$, γ
147. ab, γ
148. h_c, γ (§. 3, 2)
149. h_c, δ (§. 3, 1)
150. $h_b - h_a$, γ (§. 3, 1)
151. w_c, δ (§. 3, 1)
152. h_c, α (§. 7, 3)
153. $h_b - h_a$, δ.

h) In den folgenden Aufgaben, von denen 168 auf eine quadratische Gleichung führt, ist **s — c** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

154. $h_b + h_a$, γ
155. w_c, γ
156. $\triangle$, α
157. $a^2 + b^2 - c^2$, γ
158. ab, γ
159. h_c, γ (§. 3, 2)
160. h_c, δ (§. 3, 1)
161. $h_b - h_a$, γ (§. 3, 1)
162. w_c, δ (§. 3, 1)
163. h_a, α (§. 6, 3)
164. h_a, β (§. 7, 1)
165. h_a, γ (§. 7, 3)
166. h_c, α (§. 7, 5)
167. p, β (§. 7, 5)
168. $h_b - h_a$, δ.

i) In den folgenden Aufgaben, von denen 179 auf eine quadratische Gleichung führt, ist **s — a** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

169. $h_b - h_a$, γ
170. $\triangle$, γ
171. $a^2 + b^2 - c^2$, γ
172. ab, γ
173. h_c, δ (§. 3, 1)
174. $h_b + h_a$, δ (§. 3, 1)
175. w_c, γ (§. 3, 1)
176. w_c, δ (§. 3, 1)
177. $u - v$, δ (§. 3, 1)
178. p, β (§. 7, 1)
179. $h_b + h_a$, γ.

k) In den folgenden Aufgaben, von denen 196 bis 199 auf quadratische Gleichungen führen, ist $\mathbf{h_c}$ eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

180. $u - v$, δ
181. $\triangle$, α
182. $\triangle$, γ
183. $a^2 + b^2 - c^2$, γ
184. $a^2 + b^2 - c^2$, δ
185. ab, γ
186. ab, δ
187. $p - q$, γ (§. 3, 1)
188. t_c, γ
189. $p - q$, δ (§. 3, 2)
190. t_c, δ
191. $\triangle$, δ (§. 3, 1)
192. u, γ (§. 6, 3)
193. u, δ (§. 7, 1)
194. u, β (§. 7, 3)
195. ab, α (§. 5, 2)
196. $h_b + h_a$, γ
197. $h_b - h_a$, γ
198. $a^2 + b^2$, γ
199. $a^2 + b^2$, δ.

l) In den folgenden Aufgaben ist außer h_a noch gegeben:

200. u, β (269)
201. $u - v, \beta$ (269, §. 6, 7)
202. $a^2 + b^2, \beta$ (60)
203. $a^2 - b^2, \beta$ (74).

m) In den folgenden Aufgaben, von denen 212 bis 214 auf quadratische Gleichungen führen, ist $h_b + h_a$ eins der gegebenen Elemente. Die Aufgaben 206 bis 209 können dadurch einfacher gelöst werden, daß zunächst $a + b$ aus $h_b + h_a$ und γ berechnet wird. Außer $h_b + h_a$ ist noch gegeben:

204. w_c, γ
205. $p - q, \gamma$
206. $a^2 - b^2, \gamma$
207. $a^2 + b^2, \gamma$ (101)
208. ab, γ (103)
209. t_c, γ (94)
210. $\triangle, \gamma$
211. u, α (§. 6, 6)
212. $u - v, \gamma$
213. $u - v, \delta$
214. $a^2 + b^2 - c^2, \gamma$.

n) In den folgenden Aufgaben ist $h_b - h_a$ eins der gegebenen Elemente. Die Aufgaben 218 bis 221 können dadurch einfacher gelöst werden, daß zunächst $a - b$ aus $h_b - h_a$ und γ berechnet wird. Außer $h_b - h_a$ ist noch gegeben:

215. $p - q, \gamma$
216. $u - v, \gamma$
217. $u - v, \delta$
218. t_c, γ (122)
219. $a^2 + b^2, \gamma$ (133)
220. $a^2 - b^2, \gamma$
221. ab, γ
222. $\triangle, \gamma$
223. $a^2 + b^2 - c^2, \gamma$
224. w_c, γ (§. 3, 1)
225. u, α (§. 6, 2)
226. $u - v, \alpha$ (§. 6, 6).

o) In den folgenden Aufgaben, von denen 236 und 237 auf quadratische Gleichungen führen, ist p eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

227. w_c, δ (§. 3, 1)
228. u, γ (§. 6, 5)
229. u, δ (§. 7, 3)
230. u, β (§. 7, 3)
231. q, γ (§. 6, 9)
232. $a^2 + c^2 - b^2, \gamma$
233. q, δ (§. 6, 10)
234. $a^2 + c^2 - b^2, \delta$
235. $a^2 + c^2 - b^2, \alpha$
236. $a^2 - b^2, \gamma$
237. $a^2 - b^2, \delta$.

p) In den folgenden Aufgaben, von denen 248 bis 254 auf quadratische Gleichungen führen, ist $p - q$ eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

238. w_c, δ
239. $u - v, \gamma$
240. $u - v, \delta$
241. $a^2 + b^2, \delta$
242. ab, δ
243. $a^2 - b^2, \alpha$
244. $a^2 - b^2, \gamma$ (oder 231)
245. $a^2 - b^2, \delta$ (oder 233)
246. u, δ (§. 6, 1)
247. $u - v, \alpha$ (§. 7, 4)
248. t_c, γ
249. t_c, δ
250. $\triangle, \delta$
251. $a^2 + b^2, \gamma$
252. $a^2 + b^2 - c^2, \gamma$
253. $a^2 + b^2 - c^2, \delta$
254. ab, γ.

q) In den folgenden Aufgaben, von denen 264 bis 268 auf quadratische Gleichungen führen, ist w_c eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

255. $u - v, \delta$
256. $a^2 + b^2 - c^2, \gamma$
257. $a^2 + b^2 - c^2, \delta$
258. ab, γ
259. ab, δ
260. $\triangle, \gamma$ (§. 3, 2)

261. $\triangle$, δ (§. 3, 1) 264. t_c, δ (oder 189) 267. $a^2 + b^2$, γ
262. u, δ (§. 7, 1) 265. t_c, γ 268. $a^2 + b^2$, δ.
263. ab, α (§. 7, 4) 266. u — v, γ

r) In den folgenden Aufgaben ist **u** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

269. v, α 270. v, γ (§. 7, 1) 271. v, δ (§. 7, 2).

s) In den folgenden Aufgaben, welche sämmtlich auf quadratische Gleichungen führen, ist **u — v** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

272. $\triangle$, γ 274. ab, γ 276. ab, δ.
273. $a^2 + b^2 - c^2$, δ 275. $a^2 + b^2 - c^2$, γ

t) In den folgenden Aufgaben ist außer $\triangle$ noch gegeben:

277. t_c, γ 280. $a^2 + b^2 - c^2$, α 283. $a^2 - b^2$, δ (§. 3, 2)
278. $a^2 + b^2$, γ 281. ab, α 284. $a^2 - b^2$, γ (§. 3, 1)
279. $a^2 + b^2 - c^2$, δ 282. ab, δ

u) In den folgenden Aufgaben, von denen 287 auf eine quadratische Gleichung führt, ist $\mathbf{t_c}$ eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

285. $a^2 + b^2$, α 287. ab, γ 288. ab, δ.
286. $a^2 + b^2 - c^2$, α

C) Unter den gegebenen Elementen befindet sich kein Winkel; jedoch kann aus zwei der gegebenen Elemente leicht ein Winkel berechnet werden, so daß sich die meisten Aufgaben auf die von B) zurückführen lassen; die betreffende Nummer ist bei jeder Aufgabe angegeben.

a) In den folgenden Aufgaben sind **a** und $\mathbf{h_c}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist β bestimmt aus $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$; außerdem ist gegeben:

289. s (70) 291. u (194) 292. $\triangle$.
290. s — c (71)

b) In den folgenden Aufgaben sind **c** und $\mathbf{h_a}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist β bestimmt aus $\sin\beta = \frac{h_a}{c}$; außerdem ist gegeben:

293. a + b (70, 99) 295. u, v, h_a (200) 297. $a^2 - b^2$ (203).
294. a — b (71, 129) 296 $a^2 + b^2$ (202)

c) In den folgenden Aufgaben sind **p** und $\mathbf{h_c}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist β bestimmt aus $\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{p}$; außerdem ist gegeben:

298. s (152) 300. s — a (178) 302. t_c
299. s — c (167) 301. u (194) 303. $\triangle$.

d) In den folgenden Aufgaben sind **a** und **p** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist β bestimmt aus $\cos\beta = \frac{p}{a}$; außerdem ist gegeben:

304. s (152)	306. s — a (178)	308. t_c
305. s — c (167)	307. u (194)	309. △.

e) In den folgenden Aufgaben sind **c** und **r** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$; außerdem ist gegeben:

310. a + b (20, 51)	316. $h_b + h_a$ (27, 55)	321. △ (45, 68)
311. a — b (24, 53)	317. $h_b - h_a$ (28, 57)	322. $a^2 + b^2$ (34, 61)
312. s (21)	318. w_c (49, 75)	323. $a^2 - b^2$ (36, 62)
313. s — c (22)	319. p, q, r (43, 231)	324. $a^2 + b^2 - c^2$ (38)
314. s — a (25)	320. u, v, r (47, 270)	325. ab (39, 64).
315. h_c (65, 41)		

f) In den folgenden Aufgaben sind **p — q** und **r** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist δ bestimmt aus $\sin\delta = \frac{p-q}{2r}$; außerdem ist gegeben:

326. a (82)	331. u (48, 246)	335. $a^2 + b^2$ (35, 241)
327. a + b (23, 91)	332. u — v (33, 240)	336. $a^2 - b^2$ (37, 241)
328. a — b (26, 116)	333. t_c (249)	337. $a^2 + b^2 - c^2$ (50, 253)
329. h_c (42, 189)	334. △ (250)	338. ab (40, 242).
330. w_c (31, 238)		

g) In den folgenden Aufgaben sind **h_c** und **w_c** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist δ bestimmt aus $\cos \frac{1}{2}\delta = \frac{h_c}{w_c}$; außerdem ist gegeben:

339. c (66, 67)	344. s — a (173, 176)	349. △ (191)
340. a + b (106, 107)	345. p — q (189)	350. $a^2 + b^2$ (199)
341. a — b (138, 139)	346. u (193)	351. $a^2 + b^2 - c^2$ (184)
342. s (149, 151)	347. u — v (180)	352. ab (186).
343. s — c (160, 162)	348. t_c (190)	

h) In den folgenden Aufgaben sind **a + b** und **$h_b + h_a$** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin\gamma = \frac{h_b + h_a}{a + b}$; außerdem ist gegeben:

353. r (20, 27)	358. w_c (89, 204)	363. $a^2 + b^2 - c^2$ (93)
354. c (51, 55)	359. u — v (108, 212)	364. ab (103)
355. h_c (105, 196)	360. t_c (94)	365. a, b, $h_b + h_a$
356. s — a (179)	361. △ (92, 210)	366. a + b, h_b, h_a.
357. p — q (90, 205)	362. $a^2 + b^2$ (101)	

i) In den folgenden Aufgaben sind **a — b** und **$h_b - h_a$** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin\gamma = \frac{h_b - h_a}{a - b}$; außerdem ist gegeben:

367. r (24, 28)	372. s — a (169)	377. △ (120, 222)
368. c (53, 57)	373. p — q (115, 215)	378. $a^2 + b^2$ (133, 219)
369. a, b, $h_b - h_a$	374. w_c (127, 224)	379. $a^2 + b^2 - c^2$ (121, 223)
370. a — b, h_b, h_a	375. u — v (118, 216)	
371. h_c (137, 197)	376. t_c (122)	380. ab (135, 221).

k) In den folgenden Aufgaben sind △ und **$a^2 + b^2 - c^2$** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\cot\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\triangle}$; außerdem ist gegeben:

381. a (59)	386. h_c (182, 183)	390. p — q (252)
382. c (68)	387. h_a (181)	391. w_c (260, 256)
383. a + b (92, 93)	388. $h_b + h_a$ (210, 214)	392. u — v (272)
384. a — b (120, 121)	389. $h_b - h_a$ (222, 223)	393. t_c (276).
385. s (146)		

l) In den folgenden Aufgaben sind △ und **ab** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin\gamma = \frac{2\triangle}{ab}$; außerdem ist gegeben:

394. r (39, 45)	400. s — a (170, 172)	405. w_c (258, 260)
395. c (68)	401. h_c (182, 185)	406. u — v (272, 274)
396. a + b (92, 103)	402. $h_b + h_a$ (208, 210)	407. t_c (276, 286)
397. a — b (120, 135)	403. $h_b - h_a$ (221, 222)	408. $a^2 + b^2$ (277)
398. s (146, 147)	404. p — q (254)	409. $a^2 - b^2$ (283)
399. s — c (164)		

m) In den folgenden Aufgaben sind **$a^2 + b^2 - c^2$** und **ab** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$; außerdem ist gegeben:

410. r (38, 39)	415. s — c (157, 158)	419. $h_b - h_a$ (221, 223)
411. c (64)	416. s — a (171, 172)	420. p — q (252, 254)
412. a + b (93, 103)	417. h_c (183, 185)	421. w_c (256, 258)
413. a — b (121, 135)	418. $h_b + h_a$ (208, 214)	422. u — v (274, 275).
414. s (147)		

D) Unter den gegebenen Elementen befindet sich kein Winkel, auch läßt sich nicht durch einfache Division zweier gegebenen Elemente ein Winkel berechnen. Die Aufgaben können alle dadurch gelöst werden, daß aus den für die die drei gegebenen Elemente oben aufgestellten Formeln zwei der drei unbekannten Größen, welche in der Regel

r, γ und δ sind, eliminirt werden; ist r eins der gegebenen Elemente, so sind nur zwei Formeln nothwendig.

a) In den folgenden Aufgaben ist **r** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

423. h_c, $\triangle$ (318). 424. h_c, t_c (332, 336).

425. h_c, $a^2 + b^2 - c^2$. Aufl. $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\,r\,h_c}$.

426. w_c, ab. Aufl. $\cos {}^1\!/_2\,\delta = \frac{ab}{2\,r\,w_c}$.

427. p, ab. Aufl. $\sin\gamma + \sin\delta = \frac{p}{r}$; $\cos\gamma + \cos\delta = \frac{ab}{2\,r^2}$ (§. 8, 1).

428. a + b, h_c. 1. Aufl. $\cos {}^1\!/_2\,\gamma^4 - \frac{2\,r + h_c}{2\,r}\cos {}^1\!/_2\,\gamma^2 + \frac{(a+b)^2}{16\,r^2} = 0$. 2. Aufl. $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{a+b}{2\,r}$; $\sin\alpha\sin\beta = \frac{h_c}{2\,r}$.

429. a — b, h_c. 1. Aufl. $\sin {}^1\!/_2\,\gamma^4 - \frac{2\,r - h_c}{2\,r}\sin {}^1\!/_2\,\gamma^2 + \frac{(a-b)^2}{16\,r^2} = 0$. 2. Aufl. $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{a-b}{2\,r}$; $\sin\alpha\sin\beta = \frac{h_c}{2\,r}$.

430. s, h_c. 1. Aufl. $h_c r\cos\gamma + 2\,r\sin\gamma = s^2 - h_c r$ (§. 3, 1). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\gamma^2 - \frac{4\,r}{s}\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\gamma + \frac{s^2 - h_c r}{s^2} = 0$.

431. s, $h_b + h_a$. Aufl. $\sin\gamma^2 - \frac{s}{r}\sin\gamma + \frac{h_b + h_a}{2\,r} = 0$.

432. s — a, $h_b - h_a$. Aufl. $\sin\gamma^2 - \frac{s-a}{r}\sin\gamma - \frac{h_b - h_a}{2\,r} = 0$.

433. s — c, $h_b + h_a$. Aufl. $\sin\gamma^2 + \frac{s-c}{r}\sin\gamma - \frac{h_b + h_a}{2\,r} = 0$.

434. h_c, $a^2 + b^2$. 1. Aufl. $\cos\gamma^2 - \frac{h_c}{r}\cos\gamma + \frac{a^2 + b^2 - 4\,r^2}{4\,r^2} = 0$. 2. Aufl. $\cos\gamma + \cos\delta = \frac{h_c}{r}$; $\cos\gamma\cos\delta = \frac{a^2 + b^2 - 4\,r^2}{4\,r^2}$. 3. Aufl. $ab = 2\,r\,h_c$.

435. t_c, ab. 1. Aufl. $\cos\gamma^2 - \frac{ab}{r^2}\cos\gamma + \frac{t_c^2 - r^2}{r^2} = 0$. 2. Aufl. $\sin {}^1\!/_2\,\delta = \frac{4\,r^2 t_c^2 - a^2 b^2}{4\,r^4}$.

436. p, $a^2 - b^2$. Aufl. $\sin\gamma + \sin\delta = \frac{p}{r}$; $\sin\gamma\sin\delta = \frac{a^2 - b^2}{4\,r^2}$.

437. $a+b,\ a^2+b^2$ 439. $a-b,\ a^2+b^2$ 441. $a^2+b^2,\ ab$.
438. $a+b,\ ab$ 440. $a-b,\ ab$

b) In den folgenden Aufgaben ist **c** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist gegeben:

442. $h_c,\ t_c$ 444. $h_c,\ a^2-b^2$ 446. $w_c,\ \triangle$ (339)
443. $t_c,\ \triangle$ 445. $t_c,\ a^2-b^2$

447. h_c, a^2+b^2. Aufl. $\cot\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,c\,h_c}$ (65).

448. $\triangle,\ a^2+b^2$ (447).

449. h_c, ab. Aufl. $\sin\gamma = \frac{c\,h_c}{ab}$ (65).

450. $a+b,\ h_c$. 1. Aufl. Aus $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$ und $\frac{2\,h_c}{a+b} = \frac{\cos\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma\,\cos\frac{1}{2}\delta}$ ergiebt sich, wenn man δ eliminirt, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{2\,c\,h_c}{(a+b)^2-c^2}$. 2. Aufl. Aus $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}}$ und $2\,c\,h_c = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$ folgt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{2\,c\,h_c}{(a+b)^2-c^2}$. 3. Aufl. $a-b=x$ gesetzt, giebt $2\,ch_c = \sqrt{\{(a+b)^2-c^2\}(c^2-x^2)}$, also $x = c\sqrt{1-\frac{4\,h_c^2}{(a+b)^2-c^2}}$. 4. Aufl. Durch c und $a+b$ ist s gegeben, mithin ϱ nach §. 15 Formel 11 zu berechnen, so daß die Aufgabe auf §. 15, 627 zurückgeführt ist.

451. $a+b,\ \triangle$ (450).

452. $a-b,\ h_c$. 1. Aufl. Aus $\frac{2\,h_c}{a-b} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma\,\sin\frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{c}{a-b} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta}$ ergiebt sich $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{c^2-(a-b)^2}{2\,c\,h_c}$. 2. Aufl. Aehnlich wie in der 2. Aufl. 450 findet man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{c^2-(a-b)^2}{2\,c\,h_c}$. 3. Aufl. $a+b=x$ gesetzt, giebt $4\,c^2h_c^2 = (x^2-c^2)\{c^2-(a-b)^2\}$, also $x = c\sqrt{1+\frac{4\,h_c^2}{c^2-(a-b)^2}}$. 4. Aufl. Durch c und $a-b$ ist $s-b$ gegeben, mithin ϱ_b nach §. 15 Formel 11 zu berechnen, so daß die Aufgabe auf §. 15, 647 zurückgeführt ist.

453. $a-b,\ \triangle$ (452).

454. a + b, w_c. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2 w_c (a+b)}$.

455. a — b, w_c. Aufl. $tg \frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{\{c^2-(a-b)^2\}\{c^2-(a-b)^2-4w_c^2\}}{4c^2 w_c^2}$

$tg \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{\{c^2-(a-b)^2\}^2}{4c^2 w_c^2} = 0.$

456. a + b, $h_b - h_a$. Aufl. $\sin \delta = \frac{(a+b)(h_b - h_a)}{c^2}$.

457. a — b, $h_b + h_a$. Aufl. $\sin \delta = \frac{(a-b)(h_b + h_a)}{c^2}$.

458. a + b, t_c. Aufl. $\cos \gamma^2 + 2\cos\gamma \frac{(a+b)^2 - c^2}{4t_c^2 + c^2 - 2(a+b)^2} -$

$\frac{4t_c^2 - c^2}{4t_c^2 + c^2 - 2(a+b)^2} = 0.$

459. a — b, t_c. Aufl. $\cos \gamma^2 + 2\cos\gamma \frac{c^2 - (a-b)^2}{4t_c^2 + c^2 - 2(a-b)^2} -$

$\frac{4t_c^2 - c^2}{4t_c^2 + c^2 - 2(a-b)^2} = 0.$

460. a + b, $a^2 + b^2$ 462. a — b, $a^2 + b^2$ 464. $a^2 + b^2$, ab.
461. a + b, ab 463. a — b, ab

c) In den folgenden Aufgaben ist außer **a** noch gegeben:

465. b, p — q. 466. p — q, t_c.

467. u, v. Aufl. $b = \frac{av}{u}$.

468. t_c, △ (473).

469. t_c, $a^2 + b^2 - c^2$. Aufl. $c^2 = 2\{2t_c^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\}$.

470. b, w_c. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{w_c(a+b)}{2ab}$.

471. b, u. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta} = \frac{u}{a}$; $\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{u(a+b)}{a(a-b)}$ (§. 9, 4).

472. b, u — v. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta} = \frac{u-v}{a-b}$; $\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{(a+b)(u-v)}{(a-b)^2}$ (§. 9, 4).

d) In den folgenden Aufgaben ist **a + b** eins der gegebenen Stücke; bei den Aufgaben 476, 481, 501, 502, in denen t_c gegeben, ist die oben in der Anmerkung hinter den Formeln besprochene Hülfsconstruction zu machen.

473. p, q.

474. u, v. Aufl. $a - b = \frac{(a+b)(u-v)}{c}$.

475. $p - q, u - v$. 1. Aufl. $\frac{\cos \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{1}{2} \delta} = \frac{a + b}{p - q}$; $\frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \delta} = \sqrt{\frac{u - v}{p - q}}$ (§. 9, 4). 2. Aufl. $(a - b)^2 = (p - q)(u - v)$.

476. h_a, t_c. Aufl. $\sin \gamma_2 = \frac{h_a}{2 t_c}$ (70).

477. $h_c, p - q$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{2 h_c (p - q)}{(a + b)^2 - (p - q)^2}$ oder ähnlich wie 453.

478. h_c, t_c (477).

479. $p - q, t_c$ (477).

480. $h_c, \triangle$ (450).

481. $t_c, \triangle$ (451).

482. $w_c, \triangle$. Aufl. $\sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{2 \triangle}{w_c (a + b)}$.

483. $p - q, w_c$. 1. Aufl. $\cos \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{(a + b) \{(a + b)^2 - (p - q)^2\}}{2 w_c (p - q)^2} \cos \frac{1}{2} \gamma - \frac{(a + b)^2}{(p - q)^2} = 0$. 2. Aufl. $\sin \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{(a + b)^2 - (p - q)^2}{2 w_c (p - q)} \sin \frac{1}{2} \delta - 1 = 0$.

484. $h_a, a^2 + b^2$

485. h_a, ab

486. $h_c, a^2 + b^2$

487. h_c, ab

488. $h_b - h_a, a^2 + b^2$ (372)

489. $h_b - h_a, ab$ (372)

490. $p, a^2 + b^2$

491. p, ab

492. $p - q, a^2 + b^2$ (465)

493. $p - q, ab$ (465)

494. $w_c, a^2 + b^2$ (470)

495. w_c, ab (470)

496. $u, a^2 + b^2$ (471)

497. u, ab (471)

498. $u - v, a^2 + b^2$ (472)

499. $u - v, ab$ (472)

500. $\triangle, a^2 + b^2$

501. $t_c, a^2 + b^2$

502. t_c, ab.

e) In den folgenden Aufgaben ist **a — b** eins der gegebenen Stücke; zur Lösung der Aufgaben 513, 514, 536, 537 ist die oben in der Anmerkung angegebene Construction zu machen. Außer **a — b** ist noch gegeben:

503. p, q.

504. u, v (474).

505. $p, u - v$. Aufl. $q = p - \frac{(a - b)^2}{u - v}$.

506. $p - q, u$. Aufl. $v = u - \frac{(a - b)^2}{p - q}$.

507. $w_c, u - v$. Aufl. $\sin \frac{1}{2} \delta = \frac{(a - b)^2 - (u - v)^2}{2 w_c (u - v)}$.

508. $h_c, u - v$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(a - b)^2 - (u - v)^2}{2 h_c (u - v)}$.

509. $h_c, p - q$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(p-q)^2 - (a-b)^2}{2 h_c (p-q)}$; oder ähnlich wie 452.

510. h_c, t_c (509)

511. $p - q, t_c$ (509)

512. $h_c, \triangle$ (452)

513. $t_c, \triangle$ (453).

514. h_a, t_c. Aufl. $\sin \gamma_2 = \frac{h_a}{2 t_c}$.

515. $s, p - q$. 1. Aufl. $\cos \frac{1}{2} \gamma = 2s \sqrt{\frac{(a-b)^2 - (p-q)^2}{(a-b)^2 (p-q+a-b)^2 - 4s^2 (p-q)^2}}$. 2. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \delta} = \frac{a-b}{p-q}$; $\frac{\cos \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{1}{2} \delta} = \frac{2s}{(a-b)+(p-q)}$ (§. 9, 4).

516. $s, u - v$. 1. Aufl. $\cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{2s}{a-b} \sqrt{\frac{(u-v)^2 - (a-b)^2}{(a-b+u-v)^2 - 4s^2}}$. 2. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \delta} = \frac{u-v}{a-b}$; $\frac{\cos \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{1}{2} \delta} = \frac{2s(u-v)}{(a-b)(a-b+u-v)}$ (§. 9, 4).

517. $s - c, p - q$. 1. Aufl. $\cos \frac{1}{2} \gamma = 2(s-c) \sqrt{\frac{(a-b)^2 - (p-q)^2}{(a-b)^2 \{(p-q)-(a-b)\}^2 - 4(s-c)^2 (p-q)^2}}$. 2. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \delta} = \frac{a-b}{p-q}$; $\frac{\cos \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{1}{2} \delta} = \frac{2s}{(p-q)-(a-b)}$ (§. 9, 4).

518. $s - c, u - v$. 1. Aufl. $\cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{2(s-c)}{a-b} \sqrt{\frac{(a-b)^2 - (u-v)^2}{4(s-c)^2 - \{(a-b)-(u-v)\}^2}}$. 2. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \delta} = \frac{u-v}{a-b}$; $\frac{\cos \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{1}{2} \delta} = \frac{2(s-c)(u-v)}{(a-b)\{(a-b)-(u-v)\}}$ (§. 9, 4).

519. $h_a, a^2 + b^2$

520. h_a, ab

521. $h_c, a^2 + b^2$

522. h_c, ab

523. $p, a^2 + b^2$

524. p, ab

525. $h_b + h_a, a^2 + b^2$ (365)

526. $h_b + h_a, ab$ (365)

527. $p - q, a^2 + b^2$ (465)

528. $p - q, ab$ (465)

529. $w_c, a^2 + b^2$ (470)

530. w_c, ab (470)

531. $u, a^2 + b^2$ (471)

532. u, ab (471)

533. $u - v, a^2 + b^2$ (472)

534. $u - v, ab$ (472)

535. $\triangle, a^2 + b^2$

536. $t_c, a^2 + b^2$

537. t_c, ab.

f) In den folgenden Aufgaben ist außer **s** noch gegeben:

538. $h_c, \triangle$ (450).

539. $t_c, a^2 + b^2$ (458).

540. w_c, $\triangle$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma + \frac{\triangle}{s^2} \cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{2\triangle}{s\,w_c}$ (§. 3, 1).

541. w_c, ab. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{2s}{w_c} \cos \frac{1}{2}\gamma + \frac{s^2}{ab} = 0$.

g) Außer **s — c** ist noch gegeben:

542. h_c, $\triangle$ (450). 543. t_c, $a^2 + b^2$ (460). 544. t_c, $a^2 + b^2 - c^2$ (458).

545. h_c, ab. Aufl. $\sin\gamma - \frac{h_c}{2(s-c)} \cos\gamma = \frac{h_c\{ab - 2(s-c)^2\}}{2ab(s-c)}$ (§. 3, 1) (159).

546. $h_b + h_a$, $\triangle$. Aufl. $\sin\gamma + \frac{\triangle}{(s-c)^2}\cos\gamma = \frac{(h_b+h_a)(s-c) - \triangle}{(s-c)^2}$ (§, 3, 1) (154).

547. w_c, $\triangle$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma + \frac{\triangle}{(s-c)^2} \cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{2\triangle}{w_c(s-c)}$ (§. 3, 1) (155).

h) Außer **s — a** ist noch gegeben:

548. $p - q$, $u - v$ (503).

549. h_c, $\triangle$ (452).

550. t_c, $a^2 + b^2$ (459).

551. t_c, $a^2 + b^2 - c^2$ (459).

552. $h_b - h_a$, $\triangle$. Aufl. $(s-a)^2 \sin\gamma + \triangle \cos\gamma = \triangle - (h_b - h_a)(s-a)$ (§. 3, 1) (169).

i) In den folgenden Aufgaben ist außer **h_c** noch gegeben:

553. $p - q$, $a^2 - b^2$

554. t_c, $a^2 - b^2$

555. $\triangle$, $a^2 - b^2$ (444)

556. $\triangle$, $a^2 + b^2$ (447)

557. $a^2 + b^2$, ab.

558. h_a, $p - q$. Aufl. $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2h_c}{p-q}$ (1); $\sin\gamma_2 = \frac{h_a}{2t_c}$ (2).

559. h_a, h_b. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(-m + h_c + h_b)(m - h_c + h_b)}{(m + h_c + h_b)(m + h_c - h_b)}}$, wenn $m = \frac{h_b h_c}{h_a}$ ist.

560. $p - q$, $u - v$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{(p-q)-(u-v)}{2h_c}$.

561. $u - v$, t_c (560).

562. $p - q$, ab. Aufl. $\sin\delta = \frac{h_c(p-q)}{ab}$.

563. t_c, ab (562).

564. $p - q$, $a^2 + b^2$. Aufl. $\operatorname{tg}\delta = \frac{2h_c(p-q)}{(a^2+b^2) - (p-q)^2}$.

565. t_c, $a^2 + b^2$ (564 oder 447).

566. $p - q$, $a^2 + b^2 - c^2$. Aufl. $\operatorname{tg}\delta = \frac{2h_c(p-q)}{4h_c^2 - (a^2+b^2-c^2)}$.

567. t_c, $a^2 + b^2 - c^2$ (566 oder 442).

568. u, v. 1. Aufl. $\cos\delta = \frac{2 h_c}{c} \sin\gamma - \cos\gamma$ und $\frac{u - v}{c} = \operatorname{tg}{}^1/_2\gamma \operatorname{tg}{}^1/_2\delta$; mithin $\cos\delta = \frac{1 - \operatorname{tg}{}^1/_2\delta^2}{1 + \operatorname{tg}{}^1/_2\delta^2} = \frac{2uv - (u^2 + v^2)\cos\gamma}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\gamma}$, dies in die vorhergehende Gleichung eingesetzt, giebt $\sin\gamma + \frac{2 h_c}{c}\cos\gamma = \frac{h_c (u^2 + v^2)}{c u v}$ (§. 3, 1). 2. Aufl. Aus $\cos\delta = \frac{2 h_c}{c}\sin\gamma - \cos\gamma$, folgt $\operatorname{tg}{}^1/_2\delta = \sqrt{\frac{1 - \cos\delta}{1 + \cos\delta}} = \sqrt{\frac{c \cos{}^1/_2\gamma - 2 h_c \sin{}^1/_2\gamma}{\operatorname{tg}{}^1/_2\gamma (c \sin{}^1/_2\gamma + 2 h_c \cos{}^1/_2\gamma)}}$; hieraus und aus $\frac{u - v}{c} = \operatorname{tg}{}^1/_2\gamma \operatorname{tg}{}^1/_2\delta$ folgt $\operatorname{tg}{}^1/_2\gamma^2 - \frac{2uv}{c h_c}\operatorname{tg}{}^1/_2\gamma + \frac{(u - v)^2}{c^2} = 0$.
3. Aufl. Durch Elimination von γ aus den beiden Gleichungen $\frac{c}{u - v} = \cot{}^1/_2\gamma \cot{}^1/_2\delta$ und $\frac{h_c}{c} = \frac{\cos{}^1/_2\delta^2 - \sin{}^1/_2\gamma^2}{\sin\gamma}$ oder $\cos\delta = \frac{2 h_c}{c}\sin\gamma - \cos\gamma$, folgt $\sin\delta = \frac{h_c (u - v)}{uv}$.

569. u, △ (568).
570. u — v, △ (568).

k) In den folgenden Aufgaben ist außer h_a noch gegeben:

571. p — q, $a^2 - b^2$
572. t_c, $a^2 + b^2$
573. t_c, $a^2 + b^2 - c^2$
574. u, v (269)
575. p — q, t_c (558)
576. $a^2 + b^2$, ab.

l) In den folgenden Aufgaben ist außer **p** noch gegeben:

577. q, t_c
578. t_c, $a^2 - b^2$ (577)
579. q, $a^2 + b^2$ (577)
580. t_c, $a^2 + b^2$ (577)
581. t_c, $a^2 + b^2 - c^2$ (577)
582. q, u (503).

583. q, ab. Aufl. $\cos\gamma^2 + \frac{c^2}{ab}\cos\gamma + \frac{c^2 pq}{a^2 b^2} - 1 = 0$ (233).

m) In den folgenden Aufgaben ist außer **p** — **q** noch gegeben:

584. △, $a^2 - b^2$
585. t_c, $a^2 - b^2$
586. t_c, △
587. t_c, $a^2 + b^2$
588. t_c, $a^2 + b^2 - c^2$
589. $a^2 + b^2$, ab
590. $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$
591. $a^2 - b^2$, ab (583)
592. t_c, ab (562)
593. u, $a^2 - b^2$ (582)
594. u — v, $a^2 - b^2$ (503)
595. u — v, t_c (508, 509, 560)
596. u — v, $a^2 + b^2$ (465)
597. u — v, ab (465)
598. w_c, t_c (345, 348)
599. u — v, $h_b - h_a$ (373, 375).

600. w_c, u — v. Aufl. $\sin{}^1/_2\delta = \frac{(p - q) - (u - v)}{2 w_c}$.

n) Zu den folgenden Aufgaben ist außer **u** noch gegeben:

601. v, $a^2 - b^2$ (582). 602. $a^2 + b^2$, ab (471).

603. v, t_c. 1. Aufl. Aus $\cos\delta = \frac{4 t_c^2 \sin\gamma^2 - c^2 - c^2\cos\gamma^2}{2 c^2 \cos\gamma}$, folgt $\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\delta^2 = \frac{c^2 \cos {}^1/_2\,\gamma^2 - 4 t_c^2 \sin {}^1/_2\,\gamma^2}{\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\gamma^2 (4 t_c^2 \cos {}^1/_2\,\gamma^2 - c^2 \sin {}^1/_2\,\gamma^2)}$; dies in $\frac{u - v}{c} = \mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\gamma\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\delta$ eingesetzt, giebt $\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\gamma = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{c^4 - 4 t_c^2 (u - v)^2}{4 t_c^2 - (u - v)^2}}$.
2. Aufl. Aus $\frac{u - v}{c} = \mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\gamma\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\delta$ folgt $\cos\delta = \frac{1 - \mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\delta^2}{1 + \mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\delta^2} = \frac{c^2\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\gamma^2 - (u - v)^2}{c^2\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\gamma^2 + (u - v)^2} = \frac{2uv - (u^2 + v^2)\cos\gamma}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\gamma}$; dies in die Formel der 1. Aufl. eingesetzt, giebt $\cos\gamma = \frac{(4 t_c^2 - c^2)(u^2 + v^2)}{2uv(4 t_c^2 + c^2)}$.

604. v, $a^2 + b^2$. 1. Aufl. Wie in 603, 2. Aufl., findet man $\cos\gamma = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(u^2 + v^2)}{2uv(a^2 + b^2)}$. 2. Aufl. a und b zu berechnen, da $a^2 + b^2$ gegeben und $a : b = u : v$.

605. t_c, $a^2 + b^2$ (603, 604). 606. t_c, $a^2 + b^2 - c^2$ (603, 604).

607. v, w_c. Aehnlich wie 603 findet man 1. Aufl. $\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\gamma = \frac{\sqrt{4 u^2 v^2 - w_c^2 (u - v)^2}}{c\,w_c}$. 2. Aufl. $\cos\gamma = \frac{(u^2 + v^2) w_c^2 - 2 u^2 v^2}{2uv(w_c^2 + uv)}$.
3. Aufl. Durch Elimination von γ aus den beiden Gleichungen $\frac{c}{u - v} = \cot {}^1/_2\,\gamma \cot {}^1/_2\,\delta$ und $\frac{w_c}{c} = \frac{\cos {}^1/_2\,\delta^2 - \sin {}^1/_2\,\gamma^2}{\sin\gamma \cos {}^1/_2\,\delta}$ folgt $\sin {}^1/_2\,\delta = \frac{w_c (u - v)}{2uv}$.

608. v, $\triangle$. Aehnlich wie 568 findet man 1. Aufl. $\sin\gamma + \frac{4\triangle}{c^2}\cos\gamma = \frac{2\triangle(u^2 + v^2)}{c^2 uv}$. 2. Aufl. $\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\gamma^2 - \frac{uv}{\triangle}\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\gamma + \frac{(u - v)^2}{c^2} = 0$. 3. Aufl. $\sin\delta = \frac{2\triangle(u - v)}{c\,u\,v}$.

609. v, ab. 1. Aufl. Aehnlich wie 603, 1. Aufl., findet man $\cos {}^1/_2\,\gamma = c\sqrt{\frac{ab - uv}{4abuv}}$; oder $\cos\gamma = \frac{c^2(ab - uv) - 2abuv}{2abuv}$.
2. Aufl. a und b zu berechnen, da ab gegeben und $a : b = u : v$.

610. v, $h_b + h_a$. 1. Aufl. $\cos {}^1/_2\,\gamma \cos {}^1/_2\,\delta = \frac{h_b + h_a}{2c}$; $\sin {}^1/_2\,\gamma \sin {}^1/_2\,\delta = \frac{(u - v)(h_b + h_a)}{2c^2}$, also $\cos {}^1/_2\,(\gamma \pm \delta)$ zu

finden. 2. Aufl. $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{h_b + h_a}{c}$; $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u}{v}$; also α und β zu finden.

611. v, $h_b - h_a$. 1. Aufl. $\sin {}^1/_2\,\gamma \sin {}^1/_2\,\delta = \frac{h_b - h_a}{2c}$; $\cos {}^1/_2\,\gamma$ $\cos {}^1/_2\,\delta = \frac{h_b - h_a}{2(u-v)}$, also $\cos {}^1/_2\,(\gamma \pm \delta)$ zu finden. 2. Aufl. $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{h_b - h_a}{c}$; $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u}{v}$; also α und β zu finden.

o) In den folgenden Aufgaben ist außer $a^2 + b^2$ noch gegeben:

612. t_c, ab
613. w_c, ab (470)
614. u — v, ab (472)
615. u — v, t_c (603, 604)
616. t_c, $\triangle$ (443, 448).

p) Außer $a^2 + b^2 - c^2$ ist noch gegeben:

617. u — v, t_c (603, 604)
618. t_c, $\triangle$ (443).

§. 15.

Dreiecks-Aufgaben, wenn Radien der Berührungskreise gegeben.

Zur Lösung der hierher gehörenden Aufgaben sind außer den in §. 14 angeführten Formeln noch folgende zu benutzen, in denen wiederum $a + b + c = 2s$, also $-a + b + c = 2(s - a)$ u. s. w. und $\alpha - \beta = \delta$ ist.

1. $\varrho = 4r \sin {}^1/_2\,\alpha \sin {}^1/_2\,\beta \sin {}^1/_2\,\gamma = 2r \sin {}^1/_2\,\gamma\,(\cos {}^1/_2\,\delta - \sin {}^1/_2\,\gamma)$.
2. $\varrho_a = 4r \sin {}^1/_2\,\alpha \cos {}^1/_2\,\beta \cos {}^1/_2\,\gamma = 2r \cos {}^1/_2\,\gamma\,(\cos {}^1/_2\,\gamma + \sin {}^1/_2\,\delta)$.
3. $\varrho_b = 4r \cos {}^1/_2\,\alpha \sin {}^1/_2\,\beta \cos {}^1/_2\,\gamma = 2r \cos {}^1/_2\,\gamma\,(\cos {}^1/_2\,\gamma - \sin {}^1/_2\,\delta)$.
4. $\varrho_c = 4r \cos {}^1/_2\,\alpha \cos {}^1/_2\,\beta \sin {}^1/_2\,\gamma = 2r \sin {}^1/_2\,\gamma\,(\cos {}^1/_2\,\delta + \sin {}^1/_2\,\gamma)$.
5. $\varrho_c + \varrho = 4r \sin {}^1/_2\,\gamma \cos {}^1/_2\,\delta = 2r(\cos\alpha + \cos\beta)$.
6. $\varrho_c - \varrho = 4r \sin {}^1/_2\,\gamma^2$.
7. $\varrho_a + \varrho_b = 4r \cos {}^1/_2\,\gamma^2$.
8. $\varrho_a - \varrho_b = 4r \cos {}^1/_2\,\gamma \sin {}^1/_2\,\delta = 2r(\cos\beta - \cos\alpha)$.
9. $h_c - \varrho = 4r \sin {}^1/_2\,\alpha \sin {}^1/_2\,\beta \cos {}^1/_2\,\delta = 2r \cos {}^1/_2\,\delta\,(\cos {}^1/_2\,\delta - \sin {}^1/_2\,\gamma)$.
10. $h_c + \varrho_c = 4r \cos {}^1/_2\,\alpha \cos {}^1/_2\,\beta \cos {}^1/_2\,\delta = 2r \cos {}^1/_2\,\delta\,(\cos {}^1/_2\,\delta + \sin {}^1/_2\,\gamma)$.
11. $\triangle = \varrho s = \varrho_c (s - c)$.

12. $\dfrac{1}{\varrho} - \dfrac{1}{\varrho_a} = \dfrac{2}{h_a}$. 15. $\dfrac{1}{\varrho_b} + \dfrac{1}{\varrho_c} = \dfrac{2}{h_a}$.

13. $\dfrac{1}{\varrho} - \dfrac{1}{\varrho_b} = \dfrac{2}{h_b}$. 16. $\dfrac{1}{\varrho_a} + \dfrac{1}{\varrho_c} = \dfrac{2}{h_b}$.

14. $\dfrac{1}{\varrho} - \dfrac{1}{\varrho_c} = \dfrac{2}{h_c}$. 17. $\dfrac{1}{\varrho_a} + \dfrac{1}{\varrho_b} = \dfrac{2}{h_c}$.

Aus den Formeln 12 bis 17 ergeben sich Beziehungen zwischen den Radien und den Höhen, welche der besseren Uebersichtlichkeit wegen in den folgenden 12 Formeln zusammengestellt sind.

18. Aus ϱ und ϱ_c folgt $h_c = \dfrac{2\varrho\varrho_c}{\varrho_c - \varrho}$.

19. Aus ϱ_a und ϱ_b folgt $h_c = \dfrac{2\varrho_a\varrho_b}{\varrho_a + \varrho_b}$.

20. Aus h_c und ϱ folgt $\varrho_c = \dfrac{h_c\varrho}{h_c - 2\varrho}$.

21. Aus h_c und ϱ_c folgt $\varrho = \dfrac{h_c\varrho_c}{h_c + 2\varrho_c}$.

22. Aus h_c und ϱ_a folgt $\varrho_b = \dfrac{h_c\varrho_a}{2\varrho_a - h_c}$.

23. Aus h_c und $\varrho_c + \varrho$ folgt $\varrho_c - \varrho$, nämlich: $2h_c(\varrho_c - \varrho) = 4\varrho\varrho_c = (\varrho_c + \varrho)^2 - (\varrho_c - \varrho)^2$, mithin $(\varrho_c - \varrho)^2 + 2h_c(\varrho_c - \varrho) - (\varrho_c + \varrho)^2 = 0$.

24. Aus h_c und $\varrho_c - \varrho$ folgt $\varrho_c + \varrho$ wie in 23: $(\varrho_c + \varrho)^2 = (\varrho_c - \varrho)(2h_c + \varrho_c - \varrho)$.

25. Aus h_c und $\varrho_a + \varrho_b$ folgt $\varrho_a - \varrho_b$; nämlich $2h_c(\varrho_a + \varrho_b) = 4\varrho_a\varrho_b = (\varrho_a + \varrho_b)^2 - (\varrho_a - \varrho_b)^2$; mithin $(\varrho_a - \varrho_b)^2 = (\varrho_a + \varrho_b)(\varrho_a + \varrho_b - 2h_c)$.

26. Aus h_c und $\varrho_a - \varrho_b$ folgt $\varrho_a + \varrho_b$ wie in 25: $(\varrho_a + \varrho_b)^2 - 2h_c(\varrho_a + \varrho_b) - (\varrho_a - \varrho_b)^2 = 0$.

27. Aus $h_c - \varrho$ und ϱ_c folgt ϱ; nach 20: $\varrho_c(h_c - \varrho - \varrho) = \varrho(h_c - \varrho + \varrho)$ oder $\varrho_c(h_c - \varrho) - \varrho_c\varrho = \varrho(h_c - \varrho) + \varrho^2$; mithin $\varrho^2 + (h_c - \varrho + \varrho_c)\varrho - \varrho_c(h_c - \varrho) = 0$.

28. Aus $h_c + \varrho_c$ und ϱ folgt ϱ_c; nach 21: $\varrho(h_c + \varrho_c + \varrho_c) = \varrho_c(h_c + \varrho_c - \varrho_c)$ oder $\varrho(h_c + \varrho_c) + \varrho\varrho_c = \varrho_c(h_c + \varrho_c) - \varrho_c^2$ oder $\varrho_c^2 - (h_c + \varrho_c - \varrho)\varrho_c + \varrho(h_c + \varrho_c) = 0$.

29. Aus $h_c - \varrho$ und $h_c + \varrho_c$ folgt ϱ_c und ϱ. Es ist $\dfrac{2}{h_c} = \dfrac{1}{h_c - (h_c - \varrho)} - \dfrac{1}{(h_c + \varrho_c) - h_c}$ oder $-2\big(h_c - (h_c - \varrho)\big)\big(h_c - (h_c + \varrho_c)\big) = h_c\big((h_c + \varrho_c) - h_c\big) - h_c\big(h_c - (h_c - \varrho)\big)$ oder $-2h_c^2 + 2h_c\big((h_c + \varrho_c) + (h_c - \varrho)\big) - 2(h_c + \varrho_c)$

$(h_c - \rho) = h_c (h_c + \varrho_c) - h_c^2 - h_c^2 - h_c (h_c - \varrho)$; mithin $h_c = \frac{2 (h_c + \varrho_c)(h_c - \varrho)}{(h_c + \varrho_c) + (h_c - \varrho)}$; und $\varrho = \frac{(h_c - \varrho)\left((h_c + \varrho_c) - (h_c - \varrho)\right)}{(h_c + \varrho_c) + (h_c - \varrho)}$;

$\varrho_c = \frac{h_c + \rho_c)\left((h_c + \rho_c) - (h_c - \rho)\right)}{(h_c + \rho_c) + (h_c - \rho)}$; also $\rho_c + \rho = (h_c + \rho_c) - (h_c - \rho)$; $\rho_c - \rho = \frac{\left((h_c + \rho_c) - (h_c - \rho)\right)^2}{(h_c + \rho_c) + (h_c - \rho)}$.

A) Unter den gegebenen Stücken befinden sich zwei Winkel; durch die aufgestellten Formeln ist leicht r zu berechnen, und durch r und die Winkel wiederum die Seiten.

1. ϱ, α, β
2. ϱ_c, α, β
3. $\varrho_c + \varrho, \alpha, \beta$
4. $\varrho_c - \varrho, \alpha, \beta$
5. $\varrho_a + \varrho_b, \alpha, \beta$
6. $\varrho_a - \varrho_b, \alpha, \beta$
7. $h_c + \rho_c, \alpha, \beta$
8. $h_c - \rho, \alpha, \beta$.

B) Unter den gegebenen Stücken befindet sich ein Winkel; in der Regel sind diese Aufgaben dadurch zu lösen, daß die für die beiden gegebenen Linien oben aufgestellten Formeln dividirt werden. In vielen Aufgaben findet man die Summe oder die Differenz oder das Product oder den Quotienten zweier trigonometrischer Functionen; außerdem kennt man noch die Summe oder die Differenz der Winkel, so daß die Aufgaben auf die von §. 4 bis 9 zurückzuführen sind; bei einigen dieser letzteren Aufgaben ist zu beachten, daß $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \alpha$; $\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\alpha$; $\alpha - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma$; $\frac{1}{2}\gamma + \alpha = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\delta$ ist.

a) In den folgenden Aufgaben, von denen 26 bis 30 auf quadratische Gleichungen führen, ist außer **r** noch gegeben:

9. ϱ_a, γ
10. $\varrho_c + \varrho, \gamma$
11. $\varrho_c + \varrho, \alpha - \beta$
12. $\varrho_c + \varrho, \alpha$
13. $\varrho_c - \varrho, \alpha - \beta$
14. $\varrho_c - \varrho, \alpha$
15. $\varrho_a - \varrho_b, \alpha - \beta$
16. $\rho_a + \rho_b, \alpha$
17. $\varrho_a - \varrho_b, \gamma$
18. $\varrho_a - \varrho_b, \alpha - \beta$
19. $\varrho_a - \varrho_b, \alpha$
20. $h_c - \varrho, \alpha - \beta$
21. $h_c + \varrho_c, \alpha - \beta$
22. ρ, γ (§. 6, 1)
23. ϱ_c, γ (§. 6, 5)
24. $h_c - \rho, \alpha$ (§. 6, 3)
25. $h_c + \rho_c, \alpha$ (§. 6, 3)
26. $\varrho, \alpha - \beta$
27. $\varrho_c, \alpha - \beta$
28. $\rho_a, \alpha - \beta$
29. $h_c - \varrho, \gamma$
30. $h_c + \varrho_c, \gamma$.

b) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a + b + c = 2s}$ eins der gegebenen Stücke; Aufgabe 42 führt auf eine quadratische Gleichung. Außer **s** ist noch gegeben:

31. $\rho_c, \alpha - \beta$
32. ϱ_c, α
33. $h_c + \varrho_c, \gamma$
34. $h_c + \varrho_c, \alpha - \beta$
35. ϱ, γ (§. 6, 7)
36. $\rho_a + \rho_b, \alpha - \beta$ (§. 3, 1)
37. $\rho_a + \rho_b, \alpha$ (§. 7, 5)
38. $\rho_a - \rho_b, \alpha - \beta$ (§. 3, 2)
39. $\rho_c + \rho, \gamma$
40. $\rho_a - \rho_b, \gamma$ (§. 3, 1)
41. $h_c + \varrho_c, \alpha$ (§. 7, 6)
42. $h_c - \rho, \gamma$.

43. $\varrho_a - \varrho_b$, α. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha - \frac{\rho_a - \rho_b}{s}$.

44. $\rho_c - \rho$, γ. Aufl. $c = \frac{\varrho_c - \varrho}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma}$.

45. $\varrho_a + \varrho_b$, γ. Aufl. $c = (\rho_a + \rho_b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$.

c) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a + b - c = 2 (s - c)}$ eins der gegebenen Stücke; 62 führt auf eine quadratische Gleichung. Außer $\mathbf{s - c}$ ist noch gegeben:

46. ϱ, α	52. ρ_a, $\gamma - \beta$	58. $h_c - \varrho$, α (§. 7, 6)
47. ϱ, $\alpha - \beta$	53. $h_c - \rho$, γ	59. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$ (§. 3, 1)
48. ϱ, $\alpha - \gamma$	54. $h_c - \rho$, $\alpha - \beta$	60. $\rho_a - \rho_b$, γ (§. 3, 1)
49. ϱ_a, γ	55. ϱ_c, γ (§. 6, 7)	61. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$ (§. 3, 2)
50. ρ_a, α	56. ϱ_c, α (§. 6, 9)	62. $h_c + \rho_c$, γ.
51. ρ_a, $\alpha - \beta$	57. $\rho_a + \rho_b$, α (§. 7, 3)	

63. $\rho_c + \rho$, γ. Aufl. $\cot \frac{1}{2} \alpha \cot \frac{1}{2} \beta = \frac{\rho_c + \rho}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma (s - c)} - 1$. (§. 6, 11.)

64. $\rho_c - \rho$, γ. Aufl. $c = (\rho_c - \rho) \cot \frac{1}{2} \gamma$.

65. $\rho_a + \rho_b$, γ. Aufl. $c = (\rho_a + \rho_b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$.

66. $\rho_a - \rho_b$, α. Aufl. $\cot \frac{1}{2} \beta = \frac{\rho_a - \rho_b}{s - c} + \cot \frac{1}{2} \alpha$.

d) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{s - a}$ eins der gegebenen Stücke. Außer $\mathbf{s - a}$ ist noch gegeben:

67. $\rho_c - \rho$, γ	69. $\rho_a - \rho_b$, γ	71. $\rho_c + \rho$, γ (§. 3, 1)
68. $\rho_a + \rho_b$, γ	70. $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$	72. $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$ (§. 3, 1).

e) In den folgenden Aufgaben, von denen 93 und 94 auf quadratische Gleichungen führen, ist $\mathbf{c}$ eins der gegebenen Stücke. Außer $\mathbf{c}$ ist noch gegeben:

73. $\varrho_c + \varrho$, γ	81. ρ, γ (§. 6, 1)	88. ϱ_a, $\alpha - \beta$ (§. 6, 4)
74. $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$	82. ρ, $\alpha - \beta$ (§. 6, 2)	89. ρ_a, α (§. 7, 3)
75. $\rho_c - \rho$, $\alpha - \beta$	83. ρ, α (§. 7, 3)	90. ϱ_a, β (§. 7, 1)
76. $\varrho_c - \varrho$, α	84. ϱ_c, γ (§. 6, 5)	91. $\rho_c + \rho$, α (§. 7, 3)
77. $\rho_a + \rho_b$, $\alpha - \beta$	85. ϱ_c, $\alpha - \beta$ (§. 3, 1)	92. $\rho_a - \rho_b$, α (§. 7, 3)
78. $\rho_a + \rho_b$, α	86. ρ_c, α (§. 7, 5)	93. $h_c - \rho$, γ
79. $\rho_a - \rho_b$, γ	87. ϱ_a, γ (§. 6, 3)	94. $h_c + \varrho_c$, γ.
80. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$		

f) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a}$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

95. $\rho_c - \rho$, α	98. $\varrho_a + \varrho_b$, γ	101. $\rho_c + \rho$, $\alpha - \beta$ (§. 7, 1)
96. $\rho_c - \rho$, γ	99. $\rho_c + \rho$, γ (§. 7, 4)	102. $\rho_a - \rho_b$, $\alpha - \beta$ (§. 7, 1)
97. $\varrho_a + \varrho_b$, α	100. $\rho_a - \rho_b$, γ (§. 7, 4)	103. $\varrho_c + \varrho$, α (§. 3, 2)

104. $p_c + p, \beta$ (§. 3, 1) 105. $p_a - p_b, \alpha$ (§. 3,2) 106. $p_a - p_b, \beta$ (§. 3, 1).

g) In den folgenden Aufgaben, von denen 125 auf eine quadratische Gleichung führt, ist **a + b** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

107. ϱ, γ
108. p_c, γ
109. $p_c + p, \alpha$
110. $\varrho_c + \varrho, \alpha - \beta$
111. $p_c - p, \gamma$
112. $p_a + p_b, \gamma$
113. $\varrho_a + \varrho_b, \alpha - \beta$
114. $\varrho_a - \varrho_b, \gamma$
115. $\varrho_a - \varrho_b, \alpha$
116. ϱ_a, γ (§. 3, 1)
117. $\varrho_a, \alpha - \beta$ (§. 3, 2)
118. $h_c - \varrho, \gamma$ (§. 3, 2)
119. $h_c - p, \alpha - \beta$ (§. 3, 1)
120. $h_c + p_c, \gamma$ (§. 3, 2)
121. $h_c + p_c, \alpha - \beta$ (§. 3, 1)
122. $h_c - p, \alpha$ (§. 7, 3)
123. $h_c + \varrho_c, \alpha$ (§. 7, 6)
124. $\varrho_a + \varrho_b, \alpha$ (§. 7, 3)
125. $\varrho_c - \varrho, \alpha - \beta$.
126. ϱ_a, α (§. 7, 5)
127. p_a, β (§. 7, 6)

h) In den folgenden Aufgaben, von denen 140 auf eine quadratische Gleichung führt, ist **a − b** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

128. $p_c + p, \gamma$
129. $p_c + p, \alpha$
130. $p_c - p, \gamma$
131. $p_c - p, \alpha - \beta$
132. $p_c - p, \alpha$
133. $p_a + p_b, \gamma$
134. $p_a - p_b, \alpha - \beta$
135. $p_a - p_b, \alpha$
136. p, γ (§. 3, 1)
137. $\varrho, \alpha - \beta$ (§. 3, 2)
138. ϱ_c, γ (§. 3, 1)
139. $\varrho_c, \alpha - \beta$ (§. 3, 2)
140. $p_a + p_b, \alpha - \beta$.

141. p, α. Aufl. $\cot \tfrac{1}{2}\beta = \cot \tfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{a - b}{p}$.

142. ϱ_c, α. Aufl. $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha - \dfrac{a - b}{\varrho_c}$.

143. $h_c - p, \alpha - \beta$. Aufl. $\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \dfrac{(a - b)\cos \tfrac{1}{2}\delta^2}{2(h_c - p)\sin \tfrac{1}{2}\delta + (a - b)\cos \tfrac{1}{2}\delta}$,

wo der Nenner, wie auch in 144 und 145 nach §. 3, 2 zu berechnen ist.

144. $h_c + \varrho_c, \alpha - \beta$. Aufl. $\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \dfrac{(a - b)\cos \tfrac{1}{2}\delta^2}{2(h_c + p_c)\sin \tfrac{1}{2}\delta - (a - b)\cos \tfrac{1}{2}\delta}$.

145. ϱ_a, γ. Aufl. $\sin \tfrac{1}{2}\delta = \dfrac{(a - b)\cos \tfrac{1}{2}\gamma^2}{2\varrho_a \sin \tfrac{1}{2}\gamma - (a - b)\cos \tfrac{1}{2}\gamma}$.

i) In den folgenden Aufgaben ist h_c eins der gegebenen Stücke. In den Aufgaben 146 bis 149 ist $h_c - \varrho$ oder $h_c + \varrho_c$ durch p resp. p_c zu dividiren; 156 bis 159 führen auf quadratische Gleichungen. Außer h_c ist noch gegeben:

146. p, γ
147. $\varrho, \alpha - \beta$
148. ϱ_c, γ
149. $p_c, \alpha - \beta$
150. p, α (§. 7, 4 oder 5)
151. p_c, α (§. 7, 4 oder 5)
152. ϱ_a, γ (§. 6, 3)
153. $p_a, \alpha - \beta$ (§. 6, 4)
154. ϱ_a, α (§. 7, 6)
155. ϱ_a, β (§. 7, 5)
156. $\varrho_c + \varrho, \gamma$
157. $p_c + p, \alpha - \beta$
158. $\varrho_a - \varrho_b, \gamma$
159. $\varrho_a - \varrho_b, \alpha - \beta$.

160. $\varrho_c + \varrho, \alpha$. Aufl. $(\varrho_c + \varrho) \sin\alpha \sin\beta - h_c \cos\beta = h_c \cos\alpha$ (§. 3, 1).

161. $\varrho_a - \varrho_b, \alpha$. Aufl. $h_c \cos\beta - (\varrho_a - \varrho_b) \sin\alpha \sin\beta = h_c \cos\alpha$ (§. 3, 1).

162. $p_c - p, \gamma$. Aufl. $\cos {}^1\!/_2\, \delta^2 = \frac{(\varrho_c - \varrho + 2\, h_c) \sin {}^1\!/_2\, \gamma^2}{p_c - p}$.

163. $p_c - p, \alpha - \beta$. Aufl. wie 162.

164. $p_a + p_b, \gamma$. Aufl. $\sin {}^1\!/_2\, \delta^2 = \frac{(\varrho_a + \varrho_b - 2\, h_c) \cos {}^1\!/_2\, \gamma^2}{p_a + p_b}$.

165. $\varrho_a + \varrho_b, \alpha - \beta$. Aufl. wie 164.

166. $\varrho_c - \varrho, \alpha$. Aufl. $\frac{\cos {}^1\!/_2\,(\alpha - \beta)}{\cos {}^1\!/_2\,(\alpha + \beta)} = \sqrt{\frac{p_c - p + 2\, h_c}{p_c - p_c}}$ (§. 7, 5).

167. $p_a + p_b, \alpha$. Aufl. $\frac{\sin {}^1\!/_2\,(\alpha - \beta)}{\sin {}^1\!/_2\,(\alpha + \beta)} = \sqrt{\frac{p_a + p_b - 2\, h_c}{p_a + p_b}}$ (§. 7, 1).

k) In den folgenden Aufgaben ist h_a eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

168. $\varrho_c - \varrho, \gamma$
169. $p_c - p, \beta$
170. $p_a + p_b, \gamma$
171. $p_a + p_b, \beta$
172. $p_c + p, \gamma$ (§. 7, 3)
173. $p_c + p, \alpha - \beta$ (§. 6, 3)
174. $p_a - p_b, \gamma$ (§. 7, 1)
175. $p_a - p_b, \alpha - \beta$ (§. 6, 1)

l) In den folgenden Aufgaben, von denen 189 bis 191 auf quadratische Gleichungen führen, ist $h_b + h_a$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

176. p, γ
177. p_c, γ
178. $\varrho_c - \varrho, \gamma$
179. $\varrho_c + \varrho, \alpha - \beta$
180. $p_c + p, \alpha$
181. $\varrho_a + \varrho_b, \gamma$
182. $p_a + p_b, \alpha - \beta$
183. $\varrho_a - \varrho_b, \gamma$
184. $\varrho_a - \varrho_b, \alpha - \beta$
185. $h_c - \varrho, \gamma$
186. $h_c + \varrho_c, \gamma$
187. $p_a + p_b, \alpha$ (§. 6, 4)
188. p_a, γ (§. 3, 1)
189. $\varrho, \alpha - \beta$
190. $\varrho_c, \alpha - \beta$
191. $\varrho_c - \varrho, \alpha - \beta$.

m) In den folgenden Aufgaben, von denen 204 auf eine quadratische Gleichung führt, ist $h_b - h_a$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

192. ϱ_a, γ
193. $\varrho_c - \varrho, \gamma$
194. $p_c - p, \alpha - \beta$
195. $p_c + p, \gamma$
196. $\varrho_c + \varrho, \alpha - \beta$
197. $p_a - p_b, \alpha - \beta$
198. $p_a - p_b, \alpha$
199. $p_a + p_b, \gamma$
200. $\varrho_a + \varrho_b, \alpha - \beta$
201. $p_c - p, \alpha$ (§. 6, 4)
202. ϱ, γ (§. 3, 1)
203. p_c, γ (§. 3, 1)
204. $p_a, \alpha - \beta$.

n) In den folgenden Aufgaben ist w_c eins der gegebenen Stücke. Die Aufgaben 215 bis 222 führen auf quadratische Gleichungen. Außer w_c ist noch gegeben:

205. p, γ
206. $p, \alpha - \beta$
207. p_c, γ

208. $\rho_c, \alpha - \beta$
209. $\rho_a, \alpha - \beta$
210. $\rho_c + \rho, \gamma$
211. $\rho_c - \rho, \alpha - \beta$
212. $\rho_a + \rho_b, \alpha - \beta$
213. $h_c - \rho, \alpha - \beta$
214. $h_c + \rho_c, \alpha - \beta$
215. ρ, α
216. ϱ_c, α
217. $\rho_c + \rho, \alpha - \beta$
218. $\rho_c - \rho, \gamma$
219. $\rho_a + \rho_b, \gamma$
220. $\rho_a - \rho_b, \alpha - \beta$
221. $h_c - \rho, \gamma$
222. $h_c + \varrho_c, \gamma$
223. ϱ_a, γ (§. 3, 1).
224. $\varrho_a - \varrho_b, \gamma$. Aufl. $2 w_c \cos \frac{1}{2} \gamma \sin \delta - (\rho_a - \rho_b) \cos \delta = (\varrho_a - \varrho_b) \cos \gamma$ (§. 3, 1).

o) In den folgenden Aufgaben, von denen 233 bis 235 auf quadratische Gleichungen führen, ist **p** — **q** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist noch gegeben:

225. $\rho_c + \rho, \gamma$
226. $\rho_c + \rho, \alpha - \beta$
227. $\rho_c - \rho, \gamma$
228. $\rho_c - \rho, \alpha - \beta$
229. $\rho_a + \rho_b, \gamma$
230. $\rho_a + \rho_b, \alpha - \beta$
231. $\varrho_a - \varrho_b, \gamma$
232. $\rho_a - \rho_b, \alpha - \beta$
233. $\rho, \alpha - \beta$
234. $\rho_c, \alpha - \beta$
235. $\rho_a, \alpha - \beta$
236. $\rho_c + \rho, \alpha$ (§. 7, 2)
237. $\rho_c + \rho, \beta$ (§. 7, 1)
238. $\rho_a - \rho_b, \alpha$ (§. 7, 6)
239. $\rho_a - \rho_b, \beta$ (§. 7, 5)
240. $h_c - \rho, \alpha$ (§. 7, 1)
241. $h_c + \varrho_c, \alpha$ (§. 7, 3)
242. $h_c - \varrho, \gamma$. Aufl. $(p - q) \cos \frac{1}{2} \delta - 2 (h_c - \rho) \sin \frac{1}{2} \delta = (p - q) \sin \frac{1}{2} \gamma$ (§. 3, 1).
243. $h_c - \rho, \alpha - \beta$. Aufl. wie 242 (§. 3, 2).
244. $h_c + \rho_c, \gamma$. Aufl. $2 (h_c + \rho_c) \sin \frac{1}{2} \delta - (p - q) \cos \frac{1}{2} \delta = (p - q) \sin \frac{1}{2} \gamma$ (§. 3, 1).
245. $h_c + \varrho_c, \alpha - \beta$. Aufl. wie 244 (§. 3, 2).

p) In den folgenden Aufgaben, von denen 254 bis 257 auf quadratische Gleichungen führen, ist **u** — **v** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist noch gegeben:

246. $\rho, \alpha - \beta$
247. $\varrho_c, \alpha - \beta$
248. $\varrho_c + \varrho, \alpha - \beta$
249. $\rho_c - \rho, \gamma$
250. $\rho_c - \rho, \alpha$
251. $\varrho_a + \varrho_b, \gamma$
252. $\rho_a + \rho_b, \alpha - \beta$
253. $\varrho_a - \varrho_b, \gamma$
254. $\varrho_c + \varrho, \gamma$
255. $\rho_a - \rho_b, \alpha - \beta$
256. $h_c - \rho, \alpha - \beta$
257. $h_c + \rho_c, \alpha - \beta$.

q) In den folgenden Aufgaben ist $\triangle$ eins der gegebenen Stücke; die außerdem noch gegebene Linie ist zu quadiren und durch $\triangle$ zu dividiren. Außer $\triangle$ ist noch gegeben:

258. $\rho_c + \varrho, \gamma$
259. $\rho_c - \varrho, \gamma$
260. $\rho_a + \rho_b, \gamma$
261. $\rho_a - \rho_b, \gamma$
262. ϱ, γ (§. 6, 7)
263. ρ_c, γ (§. 6, 7)
264. ϱ_c, α (§. 6, 9).

r) In den folgenden Aufgaben ist ϱ eins der gegebenen Stücke. Die Aufgaben 268 bis 270 führen auf quadratische Gleichungen. Außer ϱ ist noch gegeben:

265. ϱ_a, γ
266. $\varrho_a + \varrho_b, \gamma$ (§. 6, 1)
267. $\varrho_a - \varrho_b, \gamma$ (§. 3, 1)
268. $h_c + \varrho_c, \gamma$
269. $h_c + \varrho_c, \alpha - \beta$.

270. $\varrho_a + \varrho_b, \alpha - \beta$. Aufl. $\sin {}^1\!/_2 \gamma^2 - \frac{(\varrho_a + \varrho_b) \cos {}^1\!/_2 \delta}{\varrho_a + \varrho_b - 2\varrho} \sin {}^1\!/_2 \gamma + \frac{2\varrho}{\varrho_a + \varrho_b - 2\varrho} = 0.$

271. ϱ_c, γ. Aufl. $\cos {}^1\!/_2 \delta = \frac{(\varrho_c + \varrho) \sin {}^1\!/_2 \gamma}{\varrho_c - \varrho}$.

272. $\varrho_c, \alpha - \beta$. Aufl. wie 271.

s) In den folgenden Aufgaben, von denen 276 bis 278 auf quadratische Gleichungen führen, ist ϱ_c eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

273. ϱ_a, γ
274. $\varrho_a + \varrho_b, \gamma$ (§. 6, 5)
275. $\varrho_a - \varrho_b, \gamma$ (§. 3, 1)
276. $\varrho_a + \varrho_b, \alpha - \beta$
277. $h_c - \varrho, \gamma$
278. $h_c - \varrho, \alpha - \beta$.

t) In den folgenden Aufgaben, von denen 283 auf eine quadratische Gleichung führt, ist ϱ_a eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

279. ϱ_b, γ (§. 6, 9)
280. $\varrho_b, \alpha - \beta$ (§. 6, 10)
281. $\varrho_c - \varrho, \gamma$ (§. 6, 3)
282. $\varrho_c + \varrho, \gamma$ (§. 3, 1)
283. $\varrho_c - \varrho, \alpha - \beta$.

u) In den folgenden Aufgaben, von denen 288 auf eine quadratische Gleichung führt, ist $\varrho_c + \varrho$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

284. $\varrho_a + \varrho_b, \gamma$
285. $\varrho_a - \varrho_b, \gamma$
286. $\varrho_a - \varrho_b, \alpha - \beta$
287. $\varrho_a - \varrho_b, \alpha$ (§. 6, 10)
288. $\varrho_a + \varrho_b, \alpha - \beta$.

v) In den folgenden Aufgaben, von denen 293 bis 297 auf quadratische Gleichungen führen, ist $\varrho_c - \varrho$ eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

289. ϱ_a, γ
290. $\varrho_a + \varrho_b, \alpha - \beta$
291. $\varrho_a + \varrho_b, \alpha$
292. $\varrho_a - \varrho_b, \gamma$
293. $\varrho_a - \varrho_b, \alpha - \beta$
294. $h_c - \varrho, \gamma$
295. $h_c - \varrho, \alpha - \beta$
296. $h_c + \varrho_c, \gamma$
297. $h_c + \varrho_c, \alpha - \beta$.

w) In den folgenden Aufgaben sind $h_c - \varrho$ und $h_c + \varrho_c$ die gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

298. γ.
299. $\alpha - \beta$.
300. α.

C) Unter den gegebenen Stücken befindet sich kein Winkel, jedoch kann aus zwei der gegebenen Stücke leicht ein Winkel berechnet werden, so daß sich die meisten Aufgaben auf die von B) zurückführen lassen.

a) In den folgenden Aufgaben sind **c** und **r** die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin \gamma = \frac{c}{2r}$; außerdem ist noch gegeben:

301. ϱ (22)
302. ϱ_c (23)
303. ϱ_a (9)
304. $\varrho_c + \varrho$ (10)
305. $\varrho_a - \varrho_b$ (17)
306. $h_c - \varrho$ (29)
307. $h_c + \varrho_c$ (30).

b) In den folgenden Aufgaben sind ϱ_c und **s** die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{\varrho_c}{s}$; außerdem ist gegeben:

308. a (89)
309. c (84)
310. r (23)
311. h_c (148)
312. $h_b + h_a$ (177)
313. $h_b - h_a$ (203)
314. w_c (207)
315. ϱ (35, 271)
316. $\triangle$ (315)
317. $\varrho_c, \varrho, \triangle$ (315)
318. ϱ_a (273)
319. $\varrho_a + \varrho_b$ (45, 274)
320. $\varrho_a - \varrho_b$ (40, 275)
321. $h_c - \varrho$ (42, 277)

c) In den folgenden Aufgaben sind ϱ und **s — c** die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{\varrho}{s - c}$; außerdem ist gegeben:

322. a (83)
323. c (81)
324. r (22)
325. h_c (146)
326. $h_b + h_a$ (176)
327. $h_b - h_a$ (202)
328. w_c (205)
329. ϱ_a (49, 265)
330. ϱ_c (55, 271)
331. $\triangle$ (330)
332. $\varrho_a + \varrho_b$ (65, 266)
333. $\varrho_a - \varrho_b$ (60, 267)
334. $h_c + \varrho_c$ (62, 268)

d) In den folgenden Aufgaben sind **s — c** und ϱ_a die gegebenen Stücke; durch dieselben ist β bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \frac{s - c}{\varrho_a}$; außerdem ist gegeben:

335. a (86)
336. c (90)
337. r (9)
338. h_c (155)
339. h_a (151)
340. h_b (152)
341. w_b (223)
342. ϱ (46, 265)
343. ϱ_c (56, 279)
344. $\triangle$ (343)
345. $\varrho_a, \varrho_c, \triangle$ (343)
346. ϱ_b (50, 273)
347. $h_c - \varrho$ (58).

e) In den folgenden Aufgaben sind **b** und h_a die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin \gamma = \frac{h_a}{b}$; außerdem ist gegeben:

348. ϱ (83, 150)
349. ϱ_c (89, 154)
350. ϱ_a (90, 151)
351. $\varrho_c + \varrho$ (99, 172)
352. $\varrho_c - \varrho$ (96, 168)
353. $\varrho_a + \varrho_b$ (98, 170)
354. $\varrho_a - \varrho_b$ (100, 174)

f) In den folgenden Aufgaben sind **c** und $\varrho_c - \varrho$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{\varrho_c - \varrho}{c}$; außerdem ist gegeben:

355. a
356. h_a
357. h_c (162, §. 14, 65)
358. $\triangle$ (357)
359. $\triangle, h_c, \varrho_c - \varrho$ (357)
360. a + b (111)
361. a — b (130)
362. $h_b + h_a$ (178)
363. $h_b - h_a$ (193)
364. $\varrho_c - \varrho$, p, q (227)
365. $\varrho_c - \varrho$, u, v (249)
366. w_c 218, (§. 14, 75)

367. t_c (§. 16, 97)
368. c, ϱ, ϱ_c (81, 84)
369. ϱ_a (87, 281)
370. $\varrho_a - \varrho_b$ (79, 292)
371. $h_c - \varrho$ (93, 294)
372. $h_c + \varrho_c$ (94, 296).

g) In den folgenden Aufgaben sind **r** und $\varrho_c - \varrho$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin {}^1/_2\,\gamma = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\varrho_c - \varrho}{r}}$; außerdem ist gegeben:

373. a
374. h_a
375. $a + b$ (111)
376. $a - b$ (130)
377. $s - a$ (67)
378. p (§. 14, 43)
379. $p - q$ (227)
380. h_c (162)
381. $h_b + h_a$ (178)
382. $h_b - h_a$ (193)
383. u (§. 14, 47)
384. $u - v$ (249)
385. w_c (218, §. 14, 75)
386. t_c (§. 16, 97)
387. r, ϱ, ϱ_c (22, 23)
388. ϱ_a (9, 281)
389. $\varrho_a - \varrho_b$ (17, 292)
390. $h_c - \varrho$ (29, 294)
391. $h_c + \varrho_c$ (30, 296)
392. s (44)
393. $s - c$ (64)
394. $s - a$ (67).

h) In den folgenden Aufgaben sind **c** und $\varrho_a + \varrho_b$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg} {}^1/_2\,\gamma = \frac{c}{\varrho_a + \varrho_b}$; außerdem ist gegeben:

395. a
396. h_a
397. $a + b$ (112)
398. $a - b$ (133)
399. h_c (164)
400. $\triangle$ (399)
401. $\triangle, h_c, \varrho_a + \varrho_b$ (399)
402. $h_b + h_a$ (181)
403. $h_b - h_a$ (199)
404. $\varrho_a + \varrho_b, p, q$ (229)
405. t_c (§. 16, 95)
406. w_c (219)
407. $\varrho_a + \varrho_b, u, v$ (251)
408. ϱ (81, 266)
409. ϱ_c (84, 274)
410. c, ϱ_a, ϱ_b (79, 279)
411. $\varrho_c + \varrho$ (73, 284)
412. $h_c - \varrho$ (93)
413. $h_c + \varrho_c$ (94).

i) In den folgenden Aufgaben sind **r** und $\varrho_a + \varrho_b$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\cos {}^1/_2\,\gamma = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\varrho_a + \varrho_b}{r}}$; außerdem ist gegeben:

414. a
415. h_a
416. $a + b$ (112)
417. $a - b$ (133)
418. h_c (164)
419. $\triangle, r, \varrho_a + \varrho_b$ (418)
420. $h_b + h_a$ (181)
421. $h_b - h_a$ (199)
422. p (§. 14, 43)
423. $p - q$ (229)
424. u (§. 14, 47)
425. $u - v$ (251)
426. t_c (§. 16, 97)
427. w_c (219)
428. ϱ (22, 266)
429. r, ϱ_a, ϱ_b (9, 279)
430. ϱ_c (23, 274)
431. $\varrho_c + \varrho$ (10, 284)
432. $h_c - \varrho$ (29)
433. $h_c + \varrho_c$ (30)
434. s (45)
435. $s - a$ (68)
436. $s - c$ (65).

k) In den folgenden Aufgaben sind $\varrho_c - \varrho$ und $\varrho_a + \varrho_b$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\operatorname{tg} {}^1/_2\,\gamma = \sqrt{\frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_a + \varrho_b}}$; außerdem ist gegeben:

437. a (96, 98)
438. $a + b$ (111, 112)
439. $a - b$ (128, 133)
440. h_c (162, 164)
441. h_a (168, 170)
442. $h_b + h_a$ (178, 181)
443. $h_b - h_a$ (193, 199)
444. w_c (218, 219)
445. $p - q$ (227, 229)
446. $u - v$ (249, 251)
447. s (44, 45)
448. $s - c$ (64, 65)
449. $s - a$ (67, 68)
450. $\varrho, \varrho_c, \varrho_a + \varrho_b$ (266, 271)
451. $\varrho_c - \varrho, \varrho_a, \varrho_b$ (279, 281)
452. $h_c - \varrho$ (294)
453. $h_c + \varrho_c$ (296)
454. p (422)
455. u (424)
456. t_c (426).

l) In den folgenden Aufgaben sind **a + b** und $\varrho_c + \varrho$ die gegebenen Stücke; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\mathrm{tg}\ \frac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho_c + \varrho}{a + b}$; außerdem ist gegeben:

457. $a, b, \varrho_c + \varrho$
458. c (73)
459. t_c (§. 14, 96)
460. r (10)
461. h_c (156)
462. $h_b - h_a$ (195)
463. w_c (210)
464. $p - q$ (225)
465. $u - v$ (254)
466. $a + b, \varrho, \varrho_c$ (111, 271)
467. ϱ_a (116, 282)
468. $\varrho_a + \varrho_b$ (112, 284)
469. $\varrho_a - \varrho_b$ (114, 285)
470. $h_c - \varrho$ (118, 298).

m) In den folgenden Aufgaben sind **a − b** und $\varrho_a - \varrho_b$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\mathrm{tg}\ \frac{1}{2}\gamma = \frac{a - b}{\varrho_a - \varrho_b}$; außerdem ist gegeben:

471. $a, b, \varrho_a - \varrho_b$
472. c (79)
473. r (17)
474. t_c (§. 14, 124)
475. h_c (158)
476. $h_b + h_a$ (183)
477. w_c (224)
478. $p - q$ (231)
479. $u - v$ (253)
480. ϱ (267)
481. ϱ_c (275)
482. $a - b, \varrho_a, \varrho_b$ (133, 279)
483. $\varrho_c + \varrho$ (128, 285)
484. $\varrho_c - \varrho$ (130, 292)

n) In den folgenden Aufgaben sind **a + b** und $\varrho_a - \varrho_b$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist $\alpha - \beta$ bestimmt aus $\mathrm{tg}\ \frac{1}{2}\delta = \frac{\varrho_a - \varrho_b}{a + b}$; außerdem ist gegeben:

485. c (80)
486. r (18)
487. h_c (159)
488. h_a (175)
489. $h_b + h_a$ (184)
490. $h_b - h_a$ (197)
491. w_c (220)
492. $p - q$ (232)
493. $u - v$ (255)
494. $a + b, \varrho_a, \varrho_b$ (113, 280)
495. $\varrho_c + \varrho$ (110, 286)
496. $\varrho_c - \varrho$ (125, 293)
497. $h_c - \varrho$ (119)
498. $h_c + \varrho_c$ (121).

o) In den folgenden Aufgaben sind **a − b** und $\varrho_c + \varrho$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist $\alpha - \beta$ bestimmt aus $\mathrm{tg}\ \frac{1}{2}\delta = \frac{a - b}{\varrho_c + \varrho}$; außerdem ist gegeben:

499. c (74)
500. r (11)
501. h_c (157)
502. h_a (173)
503. $h_b + h_a$ (179)
504. $h_b - h_a$ (196)
505. w_c (217)
506. $p - q$ (226)
507. $u - v$ (248)
508. $a - b, \varrho, \varrho_c$ (131, 272)
509. $\varrho_a + \varrho_b$ (140, 288)
510. $\varrho_a - \varrho_b$ (134, 286)
511. $h_c - \varrho$ (143, 299)

p) In den folgenden Aufgaben sind $h_b + h_a$ und $\varrho_c + \varrho$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{h_b + h_a}{2(\varrho_c + \varrho)}}$; außerdem ist gegeben:

512. a (99)
513. $a - b$ (128)
514. c (73)
515. r (10)
516. s (39)
517. $s - c$ (63)
518. $s - a$ (71)
519. h_c (156)
520. t_c (459)
521. w_c (210)
522. $p - q$ (225)
523. $u - v$ (254)
524. $\triangle$ (258)
525. $\varrho_c + \varrho, h_a, h_b$
526. $\varrho, \varrho_c, h_b + h_a$ (271)
527. ϱ_a (282)
528. $\varrho_a + \varrho_b$ (284)
529. $\varrho_a - \varrho_b$ (285).

q) In den folgenden Aufgaben sind $h_b - h_a$ und $\varrho_a - \varrho_b$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{h_b - h_a}{2(\varrho_a - \varrho_b)}}$; außerdem ist gegeben:

530. a (100)
531. $a + b$ (114)
532. c (79)
533. r (17)
534. s (40)
535. $s - c$ (60)
536. $s - a$ (69)
537. h_c (158)
538. t_c (474)
539. w_c (224)
540. $p - q$ (231)
541. $u - v$ (253)
542. $\triangle$ (261)
543. $\varrho_a - \varrho_b, h_a, h_b$
544. $\varrho_a, \varrho_b, h_b - h_a$ (199)
545. ϱ (267)
546. ϱ_c (275)
547. $\varrho_c + \varrho$ (285)
548. $\varrho_c - \varrho$ (292).

r) In den folgenden Aufgaben sind $a + b$ und $h_b + h_a$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin \gamma = \frac{h_b + h_a}{a + b}$; außerdem ist gegeben:

549. ϱ (107, 176)
550. ϱ_c (108, 177)
551. ϱ_a (116, 188)
552. $\varrho_c - \varrho$ (111, 178)
553. $\varrho_a + \varrho_b$ (112, 181)
554. $\varrho_a - \varrho_b$ (114, 183)
555. $h_c - \varrho$ (118, 185)
556. $h_c + \varrho_c$ (120, 186)

s) In den folgenden Aufgaben sind $a - b$ und $h_b - h_a$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist γ bestimmt aus $\sin \gamma = \frac{h_b - h_a}{a - b}$; außerdem ist gegeben:

557. ϱ (136, 202)
558. ϱ_c (138, 203)
559. ϱ_a (145, 192)
560. $\varrho_c - \varrho$ (130, 193)
561. $\varrho_c + \varrho$ (128, 195)
562. $\varrho_a + \varrho_b$ (133, 199)

t) In den folgenden Aufgaben sind $u - v$ und $\varrho_c - \varrho$ die gegebenen

Elemente; durch dieselben ist $\alpha - \beta$ bestimmt aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{u - v}{\varrho_c - \varrho}$; außerdem ist gegeben:

563. r (13)
564. a + b (125)
565. a — b (131)
566. h_c (163)
567. $h_b + h_a$ (191)
568. $h_b - h_a$ (194)
569. p — q (228)
570. u, v, $\varrho_c - \varrho$ (75)
571. w_c (211)
572. u—v, ϱ, ϱ_c (246, 247)
573. $\varrho_a + \varrho_b$ (252, 290)
574. $\varrho_a - \varrho_b$ (255, 293)
575. $h_c - \varrho$ (256)
576. $h_c + \varrho_c$ (257).

u) In den folgenden Aufgaben sind **p — q** und **r** die gegebenen Elemente; durch dieselben ist $\alpha - \beta$ bestimmt aus $\sin \delta = \frac{p - q}{2 r}$; außerdem ist gegeben:

577. ϱ (26, 233)
578. ϱ_c (27, 234)
579. ϱ_a (28, 235)
580. $\varrho_c + \varrho$ (11, 226)
581. $\varrho_c - \varrho$ (13, 228)
582. $\varrho_a + \varrho_b$ (15, 230)
583. $\varrho_a - \varrho_b$ (18, 232)
584. $h_c - p$ (20, 243)
585. $h_c + \varrho_c$ (21, 245)

v) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{h_c}$ und $\mathbf{w_c}$ die gegebenen Elemente; durch dieselben ist $\alpha - \beta$ bestimmt aus $\cos \frac{1}{2} \delta = \frac{h_c}{w_c}$; außerdem ist gegeben:

586. ϱ (147, 206)
587. ϱ_c (149, 208)
588. ϱ_a (153, 235)
589. $\varrho_c + \varrho$ (157, 217)
590. $\varrho_c - \varrho$ (163, 211)
591. $\varrho_a + \varrho_b$ (165, 212)
592. $\varrho_a - \varrho_b$ (159, 220).

D) Unter den gegebenen Elementen befindet sich kein Winkel, auch läßt sich nicht durch einfache Division zweier gegebenen Elemente ein Winkel berechnen. Die Aufgaben können alle dadurch gelöst werden, daß aus den für die drei gegebenen Elemente oben aufgestellten Formeln zwei der drei unbekannten Größen, welche in der Regel r, γ und δ sind, eliminirt werden; ist r eins der gegebenen Elemente, so sind nur zwei Formeln nothwendig. Viele Aufgaben, namentlich solche, in denen Höhen oder zwei Radien der Berührungskreise gegeben, lassen sich durch Benutzung der Formeln 12 bis 29 auf solche von C) zurückführen; die Nummer der früheren Aufgabe ist dann in Klammern unmittelbar hinter die Aufgabe gesetzt.

a) In den folgenden Aufgaben ist **r** eins der gegebenen Elemente; außerdem ist noch gegeben:

593. h_c, ϱ (383). 2. Aufl. $\sin \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\varrho^2}{2 r (h_c - 2 r)}$.

594. h_c, ϱ_c (383). 2. Aufl. $\sin \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\varrho_c^2}{2 r (h_c + 2 \varrho_c)}$.

595. $h_c, \varrho + \varrho_c$ (383). 2. Aufl. $\cos {}^1/_2\, \delta^2 - \sin {}^1/_2\, \gamma^2 = \frac{h_c}{2\,r}$; $\cos {}^1/_2\, \delta \sin {}^1/_2\, \gamma = \frac{\varrho_c + \varrho}{4\,r}$.

596. $h_c, \varrho_a - \varrho_b$ (421). 2. Aufl. $\cos {}^1/_2\, \gamma^2 - \sin {}^1/_2\, \delta^2 = \frac{h_c}{2\,r}$; $\cos {}^1/_2\, \gamma \sin {}^1/_2\, \delta = \frac{\varrho_a - \varrho_b}{4\,r}$.

597. h_c, ϱ_a (421). 2. Aufl. $\cos {}^1/_2\, \gamma^2 = \frac{\varrho_a^2}{2\,r\,(2\,\varrho_a - h_c)}$.

598. $h_c - \varrho, h_c + \varrho_c$ (390). 2. Aufl. $\cos {}^1/_2\, \delta^2 = \frac{(h_c + \varrho_c) + (h_c - \varrho)}{4\,r}$; $\sin {}^1/_2\, \gamma = \frac{h_c + \varrho_c - (h_c - \varrho)}{4\,r \cos {}^1/_2\, \delta}$.

599. $\varrho, h_c + \varrho_c$ (383, 390). 2. Aufl. $\sin {}^1/_2\, \gamma^4 - \frac{(h_c + \varrho_c) - 3\,\varrho}{4\,r} \sin {}^1/_2\, \gamma^2 + \frac{\varrho^2}{8\,r^2} = 0$.

600. $\varrho_c, h_c - \varrho$ (383, 390). 2. Aufl. $\sin {}^1/_2\, \gamma^4 - \frac{(h_c - \varrho) + 3\,\varrho_c}{4\,r} \sin {}^1/_2\, \gamma^2 + \frac{\varrho_c^2}{8\,r^2} = 0$.

601. $\varrho_c + \varrho, \varrho_a - \varrho_b$. Aufl. $\cos \alpha = \frac{(\varrho_c + \varrho) - (\varrho_a - \varrho_b)}{4\,r}$; $\cos \beta = \frac{(\varrho_c + \varrho) + (\varrho_a - \varrho_b)}{4\,r}$.

602. $s, h_c + \varrho_c$. Aufl. $r s \sin \gamma + r\,(h_c + \varrho_c) \cos \gamma = s^2 - r\,(h_c + \varrho_c)$ (§. 3, 1).

603. $s - c, h_c - \varrho$. Aufl. $(s - c)^2 = r\,(h_c - \varrho) + r\,(h_c - \varrho) \cos \gamma - r\,(s - c) \sin \gamma$; vergl. 625.

b) In den folgenden Aufgaben ist s eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

604. h_c, ϱ (318). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma = \frac{\varrho\, h_c}{s\,(h_c - 2\,\varrho)}$.

605. $h_c, \varrho_a + \varrho_b$ (321). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma = \frac{2\,s^2 - h_c\,(\varrho_a + \varrho_b)}{2\,s\,(\varrho_a + \varrho_b)}$.

606. $h_c, \varrho_a - \varrho_b$ (321).

607. $h_c + \varrho_c, h_c - \varrho$ (318). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma = \frac{(h_c + \varrho_c)\,[(h_c + \varrho_c) - (h_c - \varrho)]}{s\,[(h_c + \varrho_c) + (h_c - \varrho)]}$.

608. h_c, $\varrho_c - \varrho$ (318). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma^2 - \frac{\varrho_c - \varrho}{s} \operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma - \frac{h_c (\varrho_c - \varrho)}{2 s^2} = 0.$

609. h_c, $\varrho_c + \varrho$ (318). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma^2 - \frac{(\varrho_c + \varrho) - h_c}{s} \operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma - \frac{h_c (\varrho_c + \varrho)}{2 s^2} = 0.$

610. ϱ, $h_c + \varrho_c$ (315). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma^2 - \frac{(h_c + \varrho_c) - \varrho}{s} \operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma + \frac{\varrho (h_c + \varrho_c)}{s^2} = 0.$

611. $\triangle$, $h_c + \varrho_c$ wie 610.

612. $\triangle$, ϱ, $h_c + \varrho_c$ wie 610.

613. w_c, ϱ. Aufl. $\sin {}^1/_2 \gamma + \frac{\varrho}{s} \cos {}^1/_2 \gamma + \frac{2 \varrho}{w_c}$ (§. 3, 1).

614. $\varrho_a + \varrho_b$, $\varrho_c + \varrho$. Aufl. $2 s \sin \gamma + \{(\varrho_a + \varrho_b) - (\varrho_c + \varrho)\} \cos \gamma = (\varrho_a + \varrho_b) + (\varrho_c + \varrho)$ (§. 3, 1) oder $\operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma^2 - \frac{2 s}{\varrho_a + \varrho_b} \operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma + \frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_a + \varrho_b} = 0.$

c) In den folgenden Aufgaben ist **s — c** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

615. h_c, ϱ_c (325, 330). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma = \frac{h_c \varrho_c}{(s - c)(h_c + 2 \varrho_c)}$.

616. h_c, $\varrho_c + \varrho$ (325, 330).

617. h_c, $\varrho_c - \varrho$ (325, 330).

618. ϱ_c, $h_c - \varrho$ (325, 330).

619. $\triangle$, $h_c - \varrho$ (325, 330).

620. $\triangle$, ϱ_c, $h_c - \varrho$ (618, 619).

621. $h_c - \varrho$, $h_c + \varrho_c$ (325, 330).

622. h_c, $\varrho_a + \varrho_b$ (338, 346).

623. h_c, $\varrho_a - \varrho_b$ (338, 346).

624. ϱ_c, h_b (343).

625. w_c, ϱ_c. Aufl. $w_c (s - c) \sin {}^1/_2 \gamma + w_c \varrho_c \cos {}^1/_2 \gamma = 2 \varrho_c (s - c)$ §. (3, 1).

626. $\varrho_a + \varrho_b$, $\varrho_c + \varrho$. Aufl. $2 (s - c) \sin \gamma - (\varrho_c + \varrho + \varrho_a + \varrho_b) \cos \gamma = \varrho_c + \varrho - (\varrho_a + \varrho_b)$ (§. 3, 1).

d) In den folgenden Aufgaben ist **c** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

627. ϱ, h_c (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma = \frac{2 \varrho^2}{c (h_c - 2 \varrho)}$.

628. $\triangle$, ϱ (627).

629. ϱ_c, h_c (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma = \frac{2 \varrho_c^2}{c (h_c + 2 \varrho_c)}$.

630. $\triangle$, ρ_c (629).

631. ρ_a, h_c (399, 410). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma = \frac{c\,(2\,\rho_a - h_c)}{2\,\varrho_a^2}$.

632. $\triangle$, ϱ_a (631).

633. h_c, $\varrho_c + \varrho$ (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma^2 + \frac{2\,h_c}{c} \operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma - \frac{(\varrho_c + \varrho)^2}{c^2} = 0$.

634. $\triangle$, $\rho_c + \rho$ (633).

635. h_c, $\rho_a - \rho_b$ (399, 410). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma^2 + \frac{2\,c\,h_c}{\varrho_a - \varrho_b} \operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma - \frac{c^2}{(\rho_a - \rho_b)^2} = 0$.

636. $\triangle$, $\rho_a - \rho_b$ 635).

637. ρ_c, $h_c - \rho$ (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma^2 - \frac{3\,\rho_c + h_c - \rho}{c} \operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma + \frac{2\,\rho_c^2}{c^2} = 0$.

638. ρ, $h_c + \rho_c$ (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma^2 - \frac{h_c + \varrho_c - 3\,\varrho}{c} \operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma + \frac{2\,\rho^2}{c^2} = 0$.

639. $h_c - \varrho$, $h_c + \varrho_c$ (357, 368). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma = \frac{\left[(h_c + \rho_c) - (h_c - \rho)\right]^2}{c\left[(h_c + \rho_c) + (h_c - \rho)\right]}$.

640. ρ, ρ_a (83, 90). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma^2 - \frac{c\,(\rho_a - \rho)}{\rho_a^2} \operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma + \frac{\varrho^2}{\varrho_a^2} = 0$.

641. ϱ_a, ϱ_c (86, 89). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma^2 - \frac{c\,(\varrho_a + \varrho_c)}{\varrho_a^2} \operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma + \frac{\varrho_c^2}{\varrho_a^2} = 0$.

642. ρ, $\rho_a - \rho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma^2 + \frac{4\,c\,\rho}{(\rho_a - \rho_b)^2} \operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma - \frac{c^2 - 4\,\varrho^2}{(\varrho_a - \varrho_b)^2} = 0$.

643. ϱ_c, $\varrho_a - \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma^2 - \frac{4\,c\,\varrho_c}{(\varrho_a - \varrho_b)^2} \operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma + \frac{4\,\rho_c^2 - c^2}{(\rho_a - \rho_b)^2} = 0$.

644. $\rho_a, \rho_c + \rho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{4 c \rho_a}{(\rho_c + \rho)^2} \cot \frac{1}{2}\gamma + \frac{4 \rho_a^2 - c^2}{(\rho_c + \rho)^2} = 0$.

645. $\rho_c + \rho, \rho_a - \rho_b$. Aufl. $\frac{\varrho_a - \varrho_b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$; $\frac{\varrho_c + \varrho}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$ (§. 9, 3).

646. $p, q, \rho_c + \rho$. Aufl. $\frac{\rho_c + \rho}{p - q} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$; $\frac{\varrho_c + \varrho}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$ (§. 9, 3).

647. $p, q, \varrho_a - \varrho_b$. Aufl. $\frac{\rho_a - \rho_b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$; $\frac{p - q}{\rho_a - \rho_b} = \frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$ (§. 9, 3).

648. $u, v, \varrho_c + \varrho$. 1. Aufl. $4 uv (\varrho_c + \varrho)^2 \cos \frac{1}{2}\gamma^4 - c^2 \{c^2 + (\rho_c + \rho)^2\} \cos \frac{1}{2}\gamma^2 + c^4 = 0$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{(\rho_c + \rho)^2 - c^2}{c^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(u - v)^2 (\rho_c + \rho)^2}{c^4} = 0$.

649. $u, v, \rho_a - \rho_b$. 1. Aufl. $4 uv (\rho_a - \rho_b)^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^4 + (u - v)^2 \{c^2 + (\rho_a - \rho_b)^2\} \sin \frac{1}{2}\gamma^2 - c^2 (u - v)^2 = 0$. 2. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma^4 + \frac{c^2 - (\rho_a - \rho_b)^2}{c^2} \cot \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(\rho_a - \rho_b)^2}{(u - v)^2} = 0$.

e) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ eins der gegebenen Stücke; bei den Aufgaben 660 bis 662 ist die Formel $a + b \pm (p - q) = 4 r \cos \frac{1}{2}\delta (\cos \frac{1}{2}\gamma \pm \sin \frac{1}{2}\delta)$ zu benutzen. Außer $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ist noch gegeben:

650. h_c, ρ (461, 466). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2 \rho (h_c - \rho)}{(a + b)(h_c - 2 \rho)}$.

651. h_c, ϱ_c (461, 466). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2 \varrho_c (h_c + \varrho_c)}{(a + b)(h_c + 2 \varrho_c)}$.

652. $h_c, \rho_c - \rho$ (461, 466). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(\rho_c - \rho)(2 h_c + \rho_c - \rho)}{(a + b)^2}$.

653. $h_c, \rho_a + \rho_b$ (487, 494). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{(\rho_a + \rho_b)(\rho_a + \rho_b - 2 h_c)}{(a + b)^2}$.

654. h_c, ϱ_a (487, 494). 2. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\delta = \frac{(a + b)(2 \varrho_a - h_c)}{2 \varrho_a (\varrho_a - h_c)}$.

655. $\varrho_c, h_c - \varrho$ (461, 466).

656. $\varrho, h_c + \varrho_c$ (461, 466).

657. $c, h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{2c(h_c - \varrho)}{(a+b)(a+b-c)}$.

658. $c, h_c + \varrho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{2c(h_c + \varrho_c)}{(a+b)(a+b+c)}$.

659. $p - q, \varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(\varrho_a + \varrho_b)(p-q)}{(a+b)^2}$.

660. $p - q, \varrho_a$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{2\varrho_a(p-q)}{(a+b)(a+b+p-q)}$.

661. $p - q, h_c - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{2(h_c - \varrho)}{a+b-(p-q)}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \frac{2(h_c - \varrho)}{a+b+p-q}$.

662. $p - q, h_c + \rho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{a+b+p-q}{2(h_c + \rho_c)}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \frac{a+b-(p-q)}{2(h_c + \varrho_c)}$.

663. $p - q, \varrho_c - \varrho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2} \delta^2 - \frac{\varrho_c - \varrho}{p-q} \cot \frac{1}{2} \delta + \frac{(p-q)^2 - (a-b)^2}{(p-q)^2} = 0$.

664. $a, b, \rho_c - \rho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2} \gamma^4 (\rho_c - \rho)^2 + \left[(\varrho_c - \varrho)^2 - (a - b^2)\right] \cot \frac{1}{2} \gamma^2 - (a+b)^2 = 0$.

665. $a, b, \varrho_a + \varrho_b$ Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^4 (\varrho_a + \varrho_b)^2 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 \left[(\varrho_a + \varrho_b)^2 - (a+b)^2\right] - (a-b)^2 = 0$.

666. ϱ_a, h_a. Aufl. Aus $\frac{a+b}{\varrho_a} = \cot \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta$ und $\frac{h_a}{2\varrho_a} = \sin \frac{1}{2} \beta (\cot \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta - \sin \frac{1}{2} \beta)$ folgt $\frac{h_a}{2\varrho_a} = \frac{a+b}{2\varrho_a} \sin \beta - (1 - \cos \beta)$ oder $\frac{a+b}{2\varrho_a} \sin \beta + \cos \beta = \frac{2\rho_a + h_a}{2\varrho_a}$ (§. 3, 1).

667. ϱ_a, h_b. Aufl. $\frac{a+b}{2\varrho_a} \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2\varrho_a - h_b}{2\varrho_a}$ (§. 3, 1).

668. ρ, ρ_a (666). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{(\rho_a - \rho)(a+b)}{\rho_a^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma + \frac{\rho(2\rho_a - \rho)}{\rho_a^2} = 0$.

669. ϱ, h_a (666). 2. Aufl. $(a+b)(h_a - 2\varrho) \sin \gamma + 2\varrho^2 \cos \gamma =$

$h_a^2 - 2\rho^2$ (§. 3, 1) oder $h_a^2 \operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma^2 - 2\,s\,(h_a - 2\,\rho) \operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma + h_a^2 - 4\,\rho^2 = 0$.

670. ϱ_a, ϱ_c (667). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma^2 + \frac{(\varrho_c + \varrho_a)(a + b)}{\varrho_a^2} \operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma - \frac{\varrho_c\,(2\,\varrho_a + \varrho_c)}{\varrho_a^2} = 0$.

671. ρ_c, h_a (667, 670).

f) In den folgenden Aufgaben ist a — b eins der gegebenen Stücke; bei den Aufgaben 681 bis 684 ist die Formel $(p - q) \pm (a - b) = 4\,r \sin {}^1/_2\, \delta\,(\cos {}^1/_2\, \delta \pm \sin {}^1/_2\, \gamma)$ zu benutzen. Außer a — b ist noch gegeben:

672. h_c, ρ (501, 508). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \delta = \frac{(a - b)\,(h_c - 2\,\varrho)}{2\,\rho\,(h_c - \rho)}$.

673. h_c, ρ_c (501, 508). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \delta = \frac{(a - b)\,(h_c + 2\,\varrho_c)}{2\,\rho_c\,(h_c + \varrho_c)}$.

674. $\varrho_c, h_c - \varrho$ (501, 508).

675. $\varrho, h_c + \varrho_c$ (501, 508).

676. $h_c, \rho_c - \rho$ (501, 508). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \delta^2 = \frac{(a - b)^2}{(2\,h_c + \varrho_c - \varrho)\,(\varrho_c - \varrho)}$.

677. $h_c, \rho_a + \rho_b$ (475, 482). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma^2 = \frac{(a - b)^2}{(\rho_a + \rho_b)(\rho_a + \rho_b - 2h_c)}$.

678. h_c, ϱ_a (498, 505). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma = \frac{(a - b)\,(2\,\varrho_a - h_c)}{2\,\varrho_a\,(\varrho_a - h_c)}$.

679. c, ρ_a. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma = \frac{c + (a - b)}{2\,\rho_a}$.

680. c, ρ_b. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \gamma = \frac{c - (a - b)}{2\,\varrho_b}$.

681. $p - q, \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \delta = \frac{(a - b)\,\{(p - q) - (a - b)\}}{2\,\varrho\,(p - q)}$.

682. $p - q, \varrho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \delta = \frac{(a - b)\,\{(p - q) + (a - b)\}}{2\,\varrho_c\,(p - q)}$.

683. $p - q, h_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \delta = \frac{(p - q) - (a - b)}{2\,(h_c - \rho)}$.

684. $p - q, h_c + \varrho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \delta = \frac{(p - q) + (a - b)}{2\,(h_c + \varrho_c)}$.

685. $p - q, \rho_c - \rho$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \delta = \frac{(a - b)^2}{(p - q)\,(\varrho_c - \varrho)}$.

686. $p - q, \varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \delta^2 - \frac{\rho_a + \rho_b}{p - q} \operatorname{tg} {}^1/_2\, \delta + \frac{(p - q)^2 - (a - b)^2}{(p - q)^2} = 0$.

687. $u - v, \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(a - b) - (u - v)}{2 \varrho}$.

688. $u - v, \varrho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(a - b) + (u - v)}{2 \varrho_c}$.

689. $u - v, h_c - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(a - b) \left[(a - b) - (u - v)\right]}{2 (u - v) (h_c - \varrho)}$.

690. $u - v, h_c + \varrho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(a - b) \left[(a - b) + (u - v)\right]}{2 (u - v) (h_c + \varrho_c)}$.

691. $u - v, \varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta^2 - \frac{(u - v) (\varrho_a + \varrho_b)}{(a - b)^2}$ $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta + \frac{(a - b)^2 - (u - v)^2}{(a - b)^2} = 0$.

692. ϱ, h_a. Aufl. Aehnlich wie in 666 findet man: $\cos \beta - \frac{a - b}{2 \varrho}$ $\sin \beta = \frac{h_a - 2 \varrho}{2 \varrho}$ (§. 3, 1).

693. ϱ, h_b. Aufl. $\cos \alpha + \frac{a - b}{2 \varrho} \sin \alpha = \frac{h_b - 2 \varrho}{2 \varrho}$ (§. 3, 1).

694. ϱ_c, h_a. Aufl. $\cos \beta - \frac{a - b}{2 \varrho_c} \sin \beta = \frac{2 \varrho_c - h_a}{2 \varrho_c}$ (§. 3, 1).

695. ϱ_c, h_b. Aufl. $\cos \alpha + \frac{a - b}{2 \varrho_c} \sin \alpha = \frac{2 \varrho_c - h_b}{2 \varrho_c}$ (§. 3, 1).

696. ϱ, ϱ_a (772). 2. Aufl. $\cot \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{(\varrho_a - \varrho) (a - b)}{\varrho^2} \cot \frac{1}{2} \gamma -$ $\frac{\varrho_a (\varrho_a - 2 \varrho)}{\varrho^2} = 0$.

697. ϱ_a, h_a (692, 695).

698. ϱ, ϱ_b (693).

699. ϱ_b, h_a (694).

700. ϱ_a, h_b (695).

701. ϱ_a, ϱ_c (695). 2. Aufl. $\varrho_c^2 \cot \frac{1}{2} \gamma^2 + (\varrho_c + \varrho_a) (a - b)$ $\cot \frac{1}{2} \gamma - \varrho_a (2 \varrho_c + \varrho_a) = 0$.

702. ϱ_b, ϱ_c (694).

g) In den folgenden Aufgaben sind Radien der Berührungskreise oder ihre Summen und Differenzen die gegebenen Stücke. Eine zweite Auflösung dieser Aufgaben erhält man, wenn man mittelst der Formeln 12 bis 29 die drei Höhen berechnet und sie so auf §. 14, 559 zurückführt.

703. $\varrho, \varrho_a, \varrho_b$. Aufl. Aus $\varrho_a - \varrho = 4 r \sin \frac{1}{2} \alpha^2$ und $\varrho_b - \varrho = 4 r \sin \frac{1}{2} \beta^2$ folgt $\sqrt{(\varrho_a - \varrho) (\varrho_b - \varrho)} = 4 r \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta$ $= \frac{\varrho}{\sin \frac{1}{2} \gamma}$; mithin $\sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho_a - \varrho) (\varrho_b - \varrho)}}$; ebenso

erhält man $\cos \frac{1}{2} \beta = \frac{\varrho_a}{\sqrt{(\rho_a + \rho_b)(\rho_a - \rho)}}$, wodurch die Aufgabe auf 1 zurückgeführt ist.

704. $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$. Aufl. $\sqrt{(\varrho_a + \varrho_b)(\varrho_a + \varrho_c)} = 4 r \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{\varrho_a}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$; mithin $\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{\rho_a}{\sqrt{(\varrho_a + \varrho_b)(\varrho_a + \varrho_c)}}$; ebenso $\sin \frac{1}{2} \beta = \frac{\varrho_b}{\sqrt{(\rho_a + \rho_b)(\rho_b + \rho_c)}}$, wodurch die Aufgabe auf 2 zurückgeführt ist.

705. $\varrho, \varrho_c, \varrho_a - \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^4 + \frac{4 \varrho_c \varrho}{(\varrho_a - \varrho_b)^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{(\varrho_c - \varrho)^2}{(\varrho_a - \varrho_b)^2} = 0$.

706. $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c + \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^4 + \frac{4 \varrho_a \varrho_b}{(\varrho_a + \varrho_b)^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{(\varrho_c + \varrho)^2}{(\varrho_a + \varrho_b)^2} = 0$.

h) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{h}_c$ eins der gegebenen Stücke. Eine Auflösung der Aufgaben 712 bis 725 erhält man dadurch, daß man sie durch Anwendung der Formeln 12 bis 29 auf eine der unter g) angeführten Aufgaben zurückführt. Bei den Aufgaben 726 bis 746 ist zu beachten, daß h_c, $\frac{1}{2}(p - q)$ und t_c Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, mithin von einander abhängige Stücke sind (vergl. §. 14, Anm.) Außer $\mathbf{h}_c$ ist noch gegeben:

707. $\triangle, \varrho$ (359).
708. $\triangle, \varrho_c$ (359).
709. $\triangle, \varrho_c + \varrho$ (359).
710. $\triangle, \varrho_a$ (401).
711. $\triangle, \varrho_a - \varrho_b$ (401).

712. ϱ, ϱ_a (703). 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\varrho^2 (2 \varrho_a - h_c)}{\varrho_a^2 (h_c - 2 \varrho)}$ (146, 152).
3. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\rho_a - h_c}{\rho_a}$, $\frac{\cos \frac{1}{2} \delta}{\sin \frac{1}{2} \gamma} = \frac{h_c - \rho}{\rho}$ (§. 9, 4).

713. ρ_a, ρ_c. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\varrho_c^2 (2 \varrho_a - h_c)}{\varrho_a^2 (2 \varrho_c + h_c)}$ (148, 152). 3. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\varrho_a - h_c}{\varrho_a}$, $\frac{\cos \frac{1}{2} \delta}{\sin \frac{1}{2} \gamma} = \frac{h_c + \varrho_c}{\varrho_c}$ (§. 9, 4).

714. $\varrho, \varrho_a + \varrho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{2 \varrho^2}{(\rho_a + \rho_b)(h_c - 2\rho)}$ (146, 164).
3. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} \gamma} = \sqrt{\frac{\varrho_a + \varrho_b - 2 h_c}{\varrho_a + \varrho_b}}$, $\frac{\cos \frac{1}{2} \delta}{\sin \frac{1}{2} \gamma} = \frac{h_c - \varrho}{\varrho}$ (§. 9, 4).

715. $\varrho, \varrho_a - \varrho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_a + \varrho_b}$ (146, 158). 3. Aufl. 705.

716. $\varrho_c, \varrho_a + \varrho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{2 \rho_c^2}{(\varrho_a + \varrho_b)(h_c + 2 \varrho_c)}$ (148, 164). 3. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} \gamma} = \sqrt{\frac{\varrho_a + \varrho_b - 2 h_c}{\varrho_a + \varrho_b}}$, $\frac{\cos \frac{1}{2} \delta}{\sin \frac{1}{2} \gamma} = \frac{h_c + \rho_c}{\varrho_c}$ (§. 9, 4).

717. $\rho_c, \rho_a - \rho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_a + \rho_b}$ (148, 158). 3. Aufl. 705.

718. $\varrho_a, \varrho_c - \varrho$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{(\varrho_c - \varrho)(2 \varrho_a - h_c)}{2 \varrho_a^2}$ (152, 162). 3. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\varrho_a - h_c}{\varrho_a}$, $\frac{\cos \frac{1}{2} \delta}{\sin \frac{1}{2} \gamma} = \sqrt{\frac{2 h_c + \varrho_c - \varrho}{\varrho_c - \varrho}}$ (§. 9, 4).

719. $\varrho_a, \varrho_c + \varrho$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_a + \varrho_b}$ (152, 156). 3. Aufl. 706.

720. $\rho_c - \rho, \rho_a - \rho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_a + \varrho_b}$ (158, 162). 3. Aufl. 705.

721. $\varrho_c + \varrho, \varrho_a + \varrho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_a + \rho_b}$ (156, 164). 3. Aufl. 706.

722. $\varrho_c + \varrho, \varrho_a - \varrho_b$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_a + \varrho_b}$ (162, 164). 3. Aufl. 705, 706.

723. h_a, ϱ (703, 712).

724. h_b, ϱ_a (703, 713).

725. h_a, ϱ_a (703, 712).

726. $p - q, \varrho$. Aufl. Aus $\frac{h_c - \varrho}{\varrho} = \frac{\cos \frac{1}{2} \delta}{\sin \frac{1}{2} \gamma}$ und $\frac{p - q}{h_c - \varrho} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} \delta - \sin \frac{1}{2} \gamma}$ oder $\frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{1}{2} \delta} = \frac{2 \varrho (h_c - \varrho)}{(h_c - 2 \varrho)(p - q)}$ folgt $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(p - q)(h_c - 2 \varrho)}{2 (h_c - \varrho)^2}$.

727. t_c, ϱ.

728. $t_c, p - q, \varrho$.

729. $p - q, \varrho_c$. Aufl. Aehnlich wie in 756 ergiebt sich $\text{tg}\, {}^1\!/_2\, \delta = \frac{(p - q)(h_c + 2\varrho_c)}{2(h_c + \varrho_c)^2}$.

730. t_c, ϱ_c.

731. $t_c, p - q, \varrho_c$.

732. $p - q, \varrho_c - \varrho$. Aufl. $\cot {}^1\!/_2\, \delta = \frac{2h_c + \varrho_c - \varrho}{p - q}$.

733. $t_c, \varrho_c - \varrho$.

734. $t_c, p - q, \varrho_c - \varrho$.

735. $p - q, \varrho_c + \varrho$ (762). 2. Aufl. $\text{tg}\, {}^1\!/_2\, \delta^2 + \frac{2h_c(p - q)}{(\varrho_c + \varrho)^2}$ $\text{tg}\, {}^1\!/_2\, \delta - \frac{(p - q)^2}{(\varrho_c + \varrho)^2} = 0$.

736. $t_c, \varrho_c + \varrho$.

737. $t_c, p - q, \varrho_c + \varrho$.

738. $p - q, \varrho_a$. Aufl. $\text{tg}\, {}^1\!/_2\, \delta = \frac{2(\varrho_a - h_c)^2}{(p - q)(2\varrho_a - h_c)}$.

739. t_c, ϱ_a.

740. $t_c, p - q, \varrho_a$.

741. $p - q, \varrho_a + \varrho_b$ (768). 2. Aufl. $\text{tg}\, {}^1\!/_2\, \delta = \frac{\varrho_a + \varrho_b - 2h_c}{p - q}$.

742. $t_c, \varrho_a + \varrho_b$.

743. $t_c, p - q, \varrho_a + \varrho_b$.

744. $p - q, \varrho_a - \varrho_b$ (768). 2. Aufl. $\text{tg}\, {}^1\!/_2\, \delta^2 + \frac{2h_c}{p - q}\, \text{tg}\, {}^1\!/_2\, \delta - \frac{(\varrho_a - \varrho_b)^2}{(p - q)^2} = 0$.

745. $t_c, \varrho_a - \varrho_b$.

746. $t_c, p - q, \varrho_a - \varrho_b$.

i) In den folgenden Aufgaben befinden sich $h_c + \varrho_c$ oder $h_c - \varrho$ unter den gegebenen Stücken; außerdem sind Radien der Berührungskreise oder ihre Summen, resp. Differenzen gegeben; dieselben sind durch die Formeln 27, 28, 29 auf die Aufgaben 703 und 704 zurückzuführen.

747. $\varrho, \varrho_a, h_c + \varrho_c$.

748. $\varrho_a, \varrho_c, h_c - \varrho$.

749. $\varrho_a, h_c - \varrho, h_c + \varrho_c$.

750. $\varrho, \varrho_a - \varrho_b, h_c + \varrho_c$.

751. $\varrho_c, \varrho_a - \varrho_b, h_c - \varrho$.

752. $\varrho_a - \varrho_b, h_c - \varrho, h_c + \varrho_c$.

753. $\varrho, \varrho_a + \varrho_b, h_c + \varrho_c$.

754. $\varrho_c, \varrho_a + \varrho_b, h_c - \varrho$.

755. $\varrho_a + \varrho_b, h_c - \varrho, h_c + \varrho_c$. 2. Aufl. $\text{tg}\, {}^1\!/_2\, \gamma^2 = \frac{\{(h_c + \varrho_c) - (h_c - \varrho)\}^2}{(\varrho_a + \varrho_b)(h_c + \varrho_c + h_c - \varrho)}$.

k) In den folgenden Aufgaben sind h_a und h_b die gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

756. $\varrho_c - \varrho$. Aufl. Aus $\frac{h_b - h_a}{2(\varrho_c - \varrho)} = \cos {}^1\!/_2\, \gamma \sin {}^1\!/_2\, \delta$ und

$\frac{h_b - h_a}{h_b + h_a} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta$ folgt $\cos \frac{1}{2}\gamma^4 + \frac{h_a h_b}{(\varrho_c - \varrho)^2} \cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(h_b + h_a)^2}{4(\varrho_c - \varrho)^2} = 0.$

757. $\varrho_a + \varrho_b$. Aufl. Aehnlich wie in 756 ergiebt sich $\sin \frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{h_a h_b}{(\varrho_a + \varrho_b)^2} \sin \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{(h_b - h_a)^2}{4(\varrho_a + \varrho_b)^2} = 0.$

l) In den folgenden Aufgaben ist w_c eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

758. ϱ, ϱ_c (609, 610). 2. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{2\varrho\varrho_c}{w_c(\varrho_c + \varrho)}$, $\cos \frac{1}{2}\delta = \frac{2\varrho\varrho_c}{w_c(\varrho - \varrho_c)}$.

759. ϱ_a, ϱ_b (588). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\delta = \frac{2\varrho_a\varrho_b}{w_c(\varrho_a + \varrho_b)}$; $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{2\varrho_a\varrho_b \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta}{\varrho_a + \varrho_b}$.

760. $h_c - \varrho, h_c + \varrho_c$ (586, 587). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\delta = \frac{2(h_c - \varrho)(h_c + \varrho_c)}{w_c(h_c - \varrho + h_c + \varrho_c)}$; $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{2(h_c - \varrho)(h_c + \varrho_c)\{(h_c + \varrho_c) - (h_c - \varrho)\}}{w_c(h_c - \varrho + h_c + \varrho_c)^2}$.

761. $\varrho_c, h_c - \varrho$ (586, 587). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{\varrho_c - (h_c - \varrho)}{w_c} \cos \frac{1}{2}\delta - \frac{2\varrho_c(h_c - \varrho)}{w_c^2} = 0$ und dadurch γ aus $\sin \frac{1}{2}\gamma = \cos \frac{1}{2}\delta \left(\frac{w_c \cos \frac{1}{2}\delta}{h_c - \varrho} - 1\right)$.

762. $\varrho, h_c + \varrho_c$ (586, 587). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{h_c + \varrho_c + \varrho}{w_c} \cos \frac{1}{2}\delta + \frac{2\varrho(h_c + \varrho_c)}{w_c^2} = 0$ und dadurch γ aus $\sin \frac{1}{2}\gamma = \cos \frac{1}{2}\delta \left(1 - \frac{w_c}{h_c + \varrho_c} \cos \frac{1}{2}\delta\right)$.

763. $u - v, \varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $(\varrho_a + \varrho_b) \cos \frac{1}{2}\delta - (u - v) \sin \frac{1}{2}\delta = 2 w_c$ (§. 3, 1), und dann $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(u - v) \cot \frac{1}{2}\delta}{\varrho_a + \varrho_b}$.

m) In den folgenden Aufgaben ist **p — q** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

764. ϱ, ϱ_c. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(p - q)(\varrho_c - \varrho)}{(\varrho_c + \varrho)^2}$ (233, 234, 272).

765. ϱ_a, ϱ_b. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(\varrho_a - \varrho_b)^2}{(p-q)(\varrho_a + \varrho_b)}$; $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{(\varrho_a + \varrho_b) \sin \frac{1}{2}\delta}{\varrho_a - \varrho_b}$.

766. $h_c - \varrho, h_c + \varrho_c$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\delta = \frac{h_c - \varrho + h_c + \varrho_c}{p - q}$; $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{h_c + \varrho_c - (h_c - \varrho)}{p - q} \sin \frac{1}{2}\delta$.

767. $\varrho_c, h_c - \varrho$ (764).

768. $\varrho, h_c + \varrho_c$ (764).

769. $\varrho_a - \varrho_b, \varrho_c + \varrho$. Aufl. $\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta} = \frac{\varrho_a - \varrho_b}{p - q}$; $\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{\varrho_c + \varrho}{p - q}$ (§. 9, 3).

770. $\varrho_a + \varrho_b, \varrho_c + \varrho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{\varrho_a + \varrho_b}{p - q} \cot \frac{1}{2}\delta - \frac{(\varrho_c + \varrho)^2 - (p-q)^2}{(p-q)^2} = 0$ (226, 230, 288).

771. $\varrho_a - \varrho_b, \varrho_c - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{\varrho_c + \varrho}{p - q} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta - \frac{(\varrho_a - \varrho_b)^2 - (p-q)^2}{(p-q)^2} = 0$ (228, 232, 293).

772. $u - v, \varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $(u - v)\cos\delta + (\varrho_a + \varrho_b)\sin\delta = 2(p - q) - (u - v)$ (§. 3, 1) (230, 252).

773. $u - v, \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(\sqrt{p-q} - \sqrt{u-v})\sqrt{u-v}}{2\varrho}$ (233, 246).

774. $u - v, \varrho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(\sqrt{p-q} + \sqrt{u-v})\sqrt{u-v}}{2\varrho_c}$ (234, 247).

775. $u - v, h_c - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(\sqrt{p-q} - \sqrt{u-v})\sqrt{p-q}}{2(h_c - \varrho)}$ (243, 256).

776. $u - v, h_c + \varrho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(\sqrt{p-q} + \sqrt{u-v})\sqrt{p-q}}{2(h_c + \varrho_c)}$ (245, 257).

n) In den folgenden Aufgaben ist **u — v** eins der gegebenen Stücke; außerdem ist gegeben:

777. $\varrho, h_c + \varrho_c$ (566, 572, 576).

778. $\varrho_c, h_c - \varrho$ (566, 572, 576).

779. $h_c - \varrho, h_c + \varrho_c$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{(u-v)(h_c + \varrho_c + h_c - \varrho)}{[(h_c + \varrho_c) - (h_c - \varrho)]^2}$ (299).

780. ϱ_a, ϱ_b. Aufl. $\cot \frac{1}{2} \delta^2 - \frac{(u-v)(\varrho_a + \varrho_b)}{(\varrho_a - \varrho_b)^2} \cot \frac{1}{2} \delta - \frac{4 \varrho_a \varrho_b}{(\varrho_a - \varrho_b)^2} = 0$ (252, 255).

781. $h_c, \varrho_c + \varrho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{2 h_c}{u - v} \cot \frac{1}{2} \delta - \frac{(\varrho_c + \varrho)^2}{(u-v)^2} = 0$.

782. $h_c, \varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $(\varrho_a + \varrho_b) \cos \delta - (u - v) \sin \delta = 4 h_c - (\varrho_a + \varrho_b)$.

783. h_c, ϱ_a (780, 782). 784. $h_c, \varrho_a - \varrho_b$ (780).

§. 16.

Aufgaben, in denen seitenhalbirende Transversalen oder durch diese bedingte Winkel gegeben sind.

A. Aufgaben, in denen die Beziehungen zwischen den Winkeln α, β, γ_1 und γ_2 zu beachten sind.

Durch Berechnung der Dreieckswinkel sind die Aufgaben auf die von §. 14, A und die von §. 15, A zurückgeführt.

a) Aus α und β sind γ_1 und γ_2 zu berechnen. Es ist $\frac{t_c}{\sin \alpha} = \frac{c}{2 \sin \gamma_1}$ und $\frac{t_c}{\sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma_2}$; mithin $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}$ (1); hieraus folgt $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2}{\sin \gamma_1 - \sin \gamma_2}$ oder $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)}$ oder $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta$ (2). Aus (1) sind γ_1 und γ_2 zu berechnen nach §. 7, 1, da $\gamma_1 + \gamma_2 = \pi - (\alpha + \beta)$; oder man kann γ_1 und γ_2 nach (2) berechnen.

1. t_c, α, β.

b) Aus γ_1 und γ_2 sind α und β zu berechnen. Nach a), Formel (1) ist $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}$, also α und β nach §. 7, 1 zu berechnen, da $\alpha + \beta = \pi - (\gamma_1 + \gamma_2)$ ist. Oder α und β sind nach a), Formel (2) zu berechnen, da $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \cot \frac{1}{2} \gamma^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2)$.

In den folgenden Aufgaben ist außer γ_1 und γ_2 noch gegeben:

2. r   4. a + b   6. s   8. h_c
3. c   5. a — b   7. s — c   9. h_a

10. $h_b + h_a$
11. $h_b - h_a$
12. p
13. $p - q$
14. w_c
15. u
16. $u - v$
17. ϱ
18. ϱ_c
19. $\triangle$
20. $a^2 + b^2$
21. $a^2 - b^2$
22. $a^2 + b^2 - c^2$
23. ab.

c) Aus α und γ_1 ist β und γ_2 zu berechnen nach §. 7, 1, da $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_1}$ und $\beta + \gamma_2 = \pi - (\alpha + \gamma_1)$ ist; mithin ähnlich wie a), Formel (2): $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta - \gamma_2) = \cot \frac{1}{2} (\alpha + \gamma_1)^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \gamma_1)$. In den folgenden Aufgaben ist außer α und γ_1 noch gegeben:

24. r
25. a
26. $a + b$
27. $a - b$
28. s
29. $s - c$
30. h_a
31. $h_b + h_a$
32. $h_b - h_a$
33. p
34. $p - q$
35. w_c
36. u
37. $u - v$
38. ϱ
39. ϱ_c
40. $\triangle$
41. $a^2 + b^2$
42. $a^2 - b^2$
43. $a^2 + b^2 - c^2$
44. ab.

d) Aus α und γ_2 ist β und γ_1 zu berechnen nach §. 6, 1, da $\sin \beta \sin \gamma_1 = \sin \alpha \sin \gamma_2$ und $\beta + \gamma_1 = \pi - (\alpha + \gamma_2)$ ist. In den folgenden Aufgaben ist außer α und γ_2 noch gegeben:

45. r
46. c
47. a
48. b
49. $a + b$
50. $a - b$
51. s
52. $s - c$
53. h_c
54. h_a
55. $h_b + h_a$
56. $h_b - h_a$
57. p
58. $p - q$
59. t_c
60. w_c
61. u
62. $u - v$
63. ϱ
64. ϱ_c
65. $\triangle$
66. $a^2 + b^2$
67. $a^2 - b^2$
68. $a^2 + b^2 - c^2$
69. ab
70. t_c, h_a, α.

e) Aus δ und $\gamma_1 - \gamma_2$ ist α und β zu berechnen nach a), Formel (2), es ist $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \cot \frac{1}{2} \delta \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2)$. In den folgenden Aufgaben ist außer δ und $\gamma_1 - \gamma_2$ noch gegeben:

71. r
72. c
73. a
74. $a + b$
75. $a - b$
76. s
77. $s - c$
78. h_c
79. b_a
80. $h_b + h_a$
81. $h_b - h_a$
82. p
83. $p - q$
84. t_c
85. w_c
86. u
87. $u - v$
88. ϱ
89. ϱ_c
90. $\triangle$
91. $a^2 + b^2$
92. $a^2 - b^2$
93. $a^2 + b^2 - c^2$
94. ab.

B. Aufgaben, welche mit den drei Aufgaben c, t_c, γ oder c, t_c, δ oder a, t_c, α in Zusammenhang stehen.

Bei den Aufgaben, in welchen $a^2 + b^2$ oder $a^2 + b^2 - c^2$ gegeben, sind die Formeln §. 14, 25 und 27 zu beachten, nämlich $a^2 + b^2 = \frac{1}{2} c^2 + 2 t_c^2$ und $a^2 + b^2 - c^2 = 2 t_c^2 - \frac{1}{2} c^2$.

a) Aufgaben, welche auf die Aufgabe c, t_c, γ zurückzuführen sind. In allen Aufgaben ergiebt sich eine gute Formel für den Inhalt. Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist M.

95. c, t_c, γ. 1. Aufl. $\frac{t_c^2}{c^2} = \frac{1 + 2\cos\delta\cos\gamma + \cos\gamma^2}{4\sin\gamma^2}$; oder $\cos\delta = \frac{4 t_c^2 \sin\gamma^2 - c^2 - c^2\cos\gamma^2}{2 c^2 \cos\gamma} = \frac{4 t_c^2 - c^2}{2 c^2 \cot\gamma} \sin\gamma - \cos\gamma$ (§. 3, 2). 2. Aufl. Im $\triangle$ CMF ist $CM^2 = t_c^2 + MF^2 - 2 t_c\, MF \sin\varepsilon$ oder $\frac{c^2}{4\sin\gamma^2} = t_c^2 + \frac{c^2}{4\sin\gamma^2} - \frac{c^2}{4} - c t_c \cot\gamma \sin\varepsilon$ oder $\sin\varepsilon = \frac{4 t_c^2 - c^2}{4 c t_c \cot\gamma}$. Ferner ist $\sin\varepsilon = \frac{b\sin\alpha}{t_c} = \frac{c\sin\alpha\sin\beta}{t_c \sin\gamma}$; mithin $\frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{4 t_c^2 - c^2}{4 c\cot\gamma}$ oder $\cos\delta = \frac{4 t_c^2 - c^2}{2 c^2 \cot\gamma} \sin\gamma - \cos\gamma$ (§. 3, 2). 3. Aufl. Aus $c\sin\alpha = 2 t_c \sin\gamma_1$ und $c\sin\beta = 2 t_c \sin\gamma_2$ folgt durch Addition und Subtraction $c\cot{}^1\!/_2\gamma\cos{}^1\!/_2\delta = 2 t_c \cos{}^1\!/_2(\gamma_1 - \gamma_2)$ und $c\,\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\gamma\sin{}^1\!/_2\delta = 2 t_c \sin{}^1\!/_2(\gamma_1 - \gamma_2)$. Durch Quadrirung und Addition der beiden letzten Gleichungen erhält man: $c^2(\cot{}^1\!/_2\gamma^2\cos{}^1\!/_2\delta^2 + \mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\gamma^2\sin{}^1\!/_2\delta^2) = 4 t_c^2$ oder $\sin{}^1\!/_2\delta^2 = \frac{c^2\cot{}^1\!/_2\gamma^2 - 4 t_c^2}{c^2(\cot{}^1\!/_2\gamma^2 - \mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\gamma^2)}$; und wenn $\cos\varphi = \frac{2 t_c}{c\cot{}^1\!/_2\gamma}$ gesetzt wird, so ist $\sin{}^1\!/_2\delta = \frac{\cos{}^1\!/_2\gamma^2\sin\varphi}{\sqrt{\cos\gamma}}$. 4. Aufl. Aehnlich wie in Aufl. 3 findet man $\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\delta^2 = \frac{c^2\cot{}^1\!/_2\gamma^2 - 4 t_c^2}{4 t_c^2 - c^2\,\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\gamma^2}$, und wenn $\frac{2 t_c}{c} = \mathrm{tg}\,\varphi$ gesetzt wird, so ist $\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\delta = \cot{}^1\!/_2\gamma\sqrt{\cot(\varphi + {}^1\!/_2\gamma)\cot(\varphi - {}^1\!/_2\gamma)}$. 5. Aufl. Nach Aufl. 3 ist $\frac{\cos{}^1\!/_2\delta}{\cos{}^1\!/_2(\gamma_1 - \gamma_2)} = \frac{2 t_c}{c}\,\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\gamma$ und $\frac{\sin{}^1\!/_2\delta}{\sin{}^1\!/_2(\gamma_1 - \gamma_2)} = \frac{2 t_c}{c}\cot{}^1\!/_2\gamma$; mithin ${}^1\!/_2\delta$ und ${}^1\!/_2(\gamma_1 - \gamma_2)$ nach §. 9, 3 zu berechnen. 6. Aufl. Es ist $a^2 + b^2 = {}^1\!/_2 c^2 + 2 t_c^2$ und $ab = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\cos\gamma} = \frac{4 t_c^2 - c^2}{4\cos\gamma}$, also a und b zu berechnen. Inhaltsberechnung. 1. Aufl. $\triangle = 2\,ACF = {}^1\!/_2 c t_c \sin\varepsilon$. In der 2. Aufl. war $\sin\varepsilon = \frac{4 t_c^2 - c^2}{4 c t_c \cot\gamma}$, mithin $\triangle = \frac{4 t_c^2 - c^2}{8\cot\gamma}$. 2. Aufl. $\triangle = {}^1\!/_2 ab\sin\gamma$. Nun ist $ab = \frac{4 t_c^2 - c^2}{4\cos\gamma}$, also $\triangle = \frac{4 t_c^2 - c^2}{8\cot\gamma}$.

95a. Von $\triangle$ ABC kennt man γ, die beliebige Transversale CD $= t$, welche von C nach AB gezogen, und die beiden Abschnitte BD $= m$ und AD $= n$. Aufl. Wenn $\angle$ ACD $= \zeta$ und BCD $= \eta$, so ist $\frac{\sin\beta}{\sin\eta} = \frac{t}{m}$ und $\frac{\sin\alpha}{\sin\zeta} = \frac{t}{n}$; daher §. 9, 7.

95b. t_a, t_c, γ (95a) 97. t_c, r, γ 99. $t_c, a^2 + b^2 - c^2, r$

96. c, t_c, r 98. $t_c, a^2 + b^2 - c^2, \gamma$ 100. $t_c, a^2 + b^2, \gamma$.

101. $r, a^2 + b^2, \gamma$. Eine Auflösung dieser Aufgabe ist auch die folgende: $\cos\delta = \frac{a^2 + b^2 - 4r^2}{4r^2\cos\gamma}$.

102. $t_c, \triangle, \gamma$. Aufl. Aus 95 folgt $c^2 = 4t_c^2 - 8\triangle\cot\gamma$.

103. $a^2 + b^2 = s^2, \triangle, \gamma$. Aufl. $t_c^2 = \triangle\cot\gamma + \frac{1}{4}s^2$; $c^2 = s^2 - 4\triangle\cot\gamma$.

104. a, b, ε. Aufl. Im $\triangle$ ACF ist AC $= b$, EF $= \frac{1}{2}a$ und $\angle$ AFC $= \varepsilon$, daher ACF nach 95 aufzulösen.

b) Aufgaben, welche auf die Aufgabe c, t_c, δ zurückzuführen sind.

105. c, t_c, δ. Aufl. $\frac{4t_c^2}{c^2} = \frac{1 + 2\cos\delta\cos\gamma + \cos\gamma^2}{\sin\gamma^2}$; mithin $\cos\gamma^2 + \frac{2c^2\cos\delta}{4t_c^2 + c^2}\cos\gamma - \frac{4t_c^2 - c^2}{4t_c^2 + c^2} = 0$. Hierin $\frac{c}{2t_c} = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt, giebt $\cos\gamma^2 + 2\sin\varphi^2\cos\delta\cos\gamma - \cos 2\varphi = 0$.

106. $c, a^2 + b^2, \delta$. 107. $t_c, a^2 + b^2, \delta$. 108. $t_c, a^2 + b^2 - c^2, \delta$.

c) Aufgaben, welche auf die Aufgabe a, t_c, α zurückzuführen sind.

109. a, t_c, α. Aufl. Aus $\frac{a}{t_c} = \frac{\sin(\alpha + \gamma_1)}{\sin(\alpha + \gamma)}$ und $\frac{a}{2t_c} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma}$ folgt $\frac{a + t_c}{a - t_c} = \operatorname{tg}\{\alpha + \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma)\}\cot\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)$ und $\frac{a + 2t_c}{a - 2t_c} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma)\cot\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)$. Mithin ist $\frac{\operatorname{tg}\{\alpha + \frac{1}{2}(\gamma + \gamma_1)\}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma + \gamma_1)} = \frac{(a + t_c)(a - 2t_c)}{(a - t_c)(a + 2t_c)}$, woraus $\gamma + \gamma_1$ nach §. 6, 10 zu berechnen ist; aus einer der vorhergehenden Formeln findet man auch $\gamma_1 - \gamma$, kennt also die Winkel des Dreiecks.

110. r, t_c, α. 111. a, r, t_c.

112. a, c, γ_1. Aufl. Im $\triangle$ ACF ist AF $= \frac{1}{2}c$, EF $= \frac{1}{2}a$ und $\angle$ ACF $= \gamma_1$, daher $\triangle$ ACF nach 109 aufzulösen.

Außerdem sei hier noch angeführt:

113. b, h_b, ε. Aufl. $\triangle$ ACF ist nach §. 14, 65 aufzulösen.

C. Aufgaben, welche durch Auflösung des Dreiecks ASB auf frühere zurückzuführen sind.

a) Bei den folgenden Aufgaben ist zu beachten, daß die drei seitenhalbirenden Transversalen durch S im Verhältniß 2 : 1 getheilt werden, und daß das von S auf AB gefällte Loth $= \frac{1}{3} h_c$ ist. Für die Aufgaben 139 bis 147 ist noch von S auf AB das Loth SG, von C auf AB das Loth CH zu fällen, und AG auf GB von G bis K abzuschlagen, so ist $AG = \frac{1}{3}(p + 2q)$; $BG = \frac{1}{3}(2p + q)$; $BK = \frac{1}{3}(p - q)$ und $GF = \frac{1}{6}(p - q)$. Nach Berechnung von △ ASB sind aus diesem die fehlenden Stücke von △ ABC zu berechnen, entweder aus t_a, t_b, t_c (196) oder durch Auflösung der Dreiecke ASE und BDS, denn man kennt von jedem derselben zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel; auch könnte man α und β nach b) berechnen.

114. c, α_1, β_2
115. t_a, α_1, β_2
116. t_a, t_b, α_1
117. c, t_a, β_2
118. c, t_a, $\angle (t_a t_b)$
119. t_a, t_b, $\angle (t_a t_b)$
120. c, t_a, t_b
121. c, t_a, t_c
122. h_c, α_1, β_2
123. t_a, t_b, h_c
124. t_a, t_c, h_c
125. $t_a + t_b$, α_1, β_2 (§. 14, 1)
126. $t_a - t_b$, α_1, β_2 (§. 14, 2)
127. c, $t_a + t_b$, $\angle (t_a t_b)$ (§. 14, 51)
128. c, $t_a - t_b$, $\angle (t_a t_b)$ (§. 14, 53)
129. c, h_c, $\angle (t_a t_b)$ (§. 14, 65)
130. c, $t_a + t_b$, α_1 (§. 14, 70)
131. c, $t_a - t_b$, α_1 (§. 14, 71)
132. t_c, $t_a + t_b$, $\angle (t_a t_b)$ (§. 14, 96)
133. t_c, $t_a - t_b$, $\angle (t_a t_b)$ (§. 14, 124)
134. c, h_c, $t_a + t_b$ (§. 14, 453)
135. c, h_c, $t_a - t_b$ (§. 14, 455)
136. t_c, α_1, β_2 (1)
137. c, t_c, $\angle (t_a t_b)$ (95)
138. t_a, t_c, β_2 (109)
139. p, q, t_a
140. p, q, α_1
141. p, q, $\angle (t_a t_b)$ (§. 14, 233)
142. p, q, $\alpha_1 - \beta_2$ (§. 14, 235)
143. $p - q$, t_a, α_1
144. $p - q$, t_a, t_b
145. $p - q$, t_a, $\alpha_1 - \beta_2$
146. $p - q$, h_c, $\angle (t_a t_b)$ (§. 14, 189)
147. $p - q$, h_c, $\alpha_1 - \beta_2$ (§. 14, 191).

b) In den folgenden Aufgaben sind die Winkel α_1 und β_2 gegeben; aus denselben sind die Winkel α und β zu berechnen. Fällt man von D und E die Lothe DG und EH auf AB, so ist $DG = EH = \frac{1}{2} h_c$; und $c = \frac{1}{2} h_c (\cot \alpha + \cot \beta_2) = \frac{1}{2} h_c (\cot \beta + \cot \alpha_1)$; mithin $\cot \beta - \cot \alpha = \cot \beta_2 - \cot \alpha_1$ (1). Ferner $GH = \frac{1}{2} c = AG - AH = \frac{1}{2} h_c (\cot \alpha_1 - \cot \alpha)$; also $\cot \alpha + \cot \beta_2 = 2 (\cot \alpha_1 - \cot \alpha)$ oder $\cot \alpha = \frac{2}{3} (\cot \alpha_1 - \frac{1}{2} \cot \beta_2)$ (2); wenn $\cot \varphi = \frac{1}{2} \cot \beta_2$ gesetzt wird, so ist $\cot \alpha = \dfrac{2 \sin (\varphi - \alpha_1)}{3 \sin \alpha_1 \sin \varphi}$. Setzt man den unter (2) für $\cot \alpha$ gefundenen Werth in (1) ein, oder entwickelt man direct $\cot \beta = \frac{2}{3} (\cot \beta_2 - \frac{1}{2} \cot \alpha_1)$ (3),

so ist, wenn $\cot\psi = \frac{1}{2}\cot\alpha_1$ gesetzt wird, $\cot\beta = \frac{2\sin(\psi - \beta_2)}{3\sin\beta_2\sin\psi}$.

Nachdem α und β berechnet, sind die meisten Aufgaben auf die von §. 14, A zurückgeführt.

Außer α_1 und β_2 ist noch gegeben:

148. r	154. h_a	159. w_c	164. $\triangle$
149. a	155. $h_b + h_a$	160. u	165. $a^2 + b^2$
150. $a + b$	156. $h_b - h_a$	161. $u - v$	166. $a^2 - b^2$
151. $a - b$	157. p	162. ϱ	167. $a^2 + b^2 - c^2$
152. s	158. $p - q$	163. ϱ_c	168. ab.
153. $s - c$			

c) In den folgenden Aufgaben sind $\angle (t_a t_c)$ und $\angle (t_b t_c)$ gegeben, mithin auch die Winkel ASF und BSF, welche im $\triangle$ ASB dieselbe Stellung einnehmen, wie γ_1 und γ_2 im $\triangle$ ABC, daher nach A, b) aus ihnen α_1 und β_2 und hieraus nach C, b) wieder α und β zu berechnen sind, wodurch die meisten Aufgaben auf die von C, a) oder §. 14, A zurückgeführt sind. Außer $\angle (t_a t_c)$ und $\angle (t_b t_c)$ ist noch gegeben:

169. r	176. h_a	183. $u - v$	190. ab
170. c	177. $h_b + h_a$	184. ρ	191. t_a (115)
171. a	178. $h_b - h_a$	185. ϱ_c	192. t_c (136)
172. $a + b$	179. p	186. $\triangle$	193. h_c (122)
173. $a - b$	180. $p - q$	187. $a^2 + b^2$	194. $t_a + t_b$ (125)
174. s	181. w_c	188. $a^2 - b^2$	195. $t_a - t_b$ (126)
175. $s - c$	182. u	189. $a^2 + b^2 - c^2$	

196. t_a, t_b, t_c. Hierbei ist zu bemerken, daß $\triangle =$
$\frac{1}{3}\sqrt{(t_a + t_b + t_c)(-t_a + t_b + t_c)(t_a - t_b + t_c)(t_a + t_b - t_c)}$.

D. Aufgaben, in denen die Winkel γ und ε gegeben sind.

Aus γ und ε können die Winkel des Dreiecks berechnet werden; es ist nämlich $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma_2}$, mithin $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \gamma_1)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \gamma_1)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta + \gamma_2)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta - \gamma_2)}$ oder $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta - \gamma_2)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \gamma_1)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^2$, woraus $\alpha - \gamma_1$ und $\beta - \gamma_2$ nach §. 6, 9 zu berechnen sind, da $\frac{1}{2}(\beta - \gamma_2) + \frac{1}{2}(\alpha - \gamma_1) = \frac{1}{2}\pi - \gamma$ ist. Oder es ist nach A, b) $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2$, woraus ebenfalls nach §. 6, 9 $\gamma_1 - \gamma_2$ und $\alpha - \beta$ zu berechnen sind, da $\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ ist. Auf beiderlei Weise kann man also α und β aus γ und ε berechnen.

Außer γ und ε ist noch gegeben:

197. r	204. h_c	211. u	217. $\triangle$
198. c	205. h_a	212. u — v	218. $a^2 + b^2$
199. a	206. $h_b + h_a$	213. t_c	219. $a^2 - b^2$
200. a + b	207. $h_b - h_a$	214. t_a	220. $a^2 + b^2 - c^2$
201. a — b	208. p	215. ϱ	221. ab
202. s	209. p — q	216. ϱ_c	221. c, ε, $\angle(t_a t_b)$ (198)
203. s — c	210. w_c		

E. Aufgaben, bei deren Lösung eine Relation zwischen t_a und q zur Anwendung kommt.

Es ist $q = b \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \frac{4 t_a^2 - a^2}{4c}$. Bei den Aufgaben, in welchen $a^2 - b^2$ gegeben, ist zu beachten, daß $a^2 - b^2 = c(p - q)$ ist.

223. p, q, t_a.

224. a, t_a, q.

225. $a^2 - b^2$, c, t_a.

226. $a^2 - b^2$, p — q, t_a.

F. Aufgaben, in denen h_a, t_a und a ± b gegeben.

227. a + b, h_a, t_a. Aufl. Es sei $\angle(a\, t_a) = \varepsilon_1$, so ist $\sin\varepsilon_1 = \frac{h_a}{t_a}$ (1). Aus $\frac{a}{2 t_a} = \frac{\sin(\varepsilon_1 + \gamma)}{\sin\gamma} = \frac{\sin(\varepsilon_1 - \beta)}{\sin\beta}$ folgt $\cot\gamma + 2\cot\varepsilon_1 = \cot\beta$ (a); und aus $(a + b)\sin\frac{1}{2}\gamma = c\cos\frac{1}{2}\delta$ und $h_a = c\sin\beta$, folgt $\frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma}{h_a} = \frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\sin\beta}$; hierin $\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\pi - (\beta + \frac{1}{2}\gamma)$ gesetzt, giebt $\cot\beta = \frac{a+b}{h_a} - \cot\frac{1}{2}\gamma$ (b). Aus (a) und (b) ergiebt sich $\cot\gamma + 2\cot\varepsilon_1 = \frac{a+b}{h_a} - \cot\frac{1}{2}\gamma$ (c), woraus γ auf zwei verschiedene Weisen zu bestimmen ist. a) $\frac{\cot\frac{1}{2}\gamma^2 - 1}{2\cot\frac{1}{2}\gamma} - \left(\frac{a+b}{h_a} - 2\cot\varepsilon_1\right) + \cot\frac{1}{2}\gamma = 0$ oder $\cot\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{a+b}{2h_a} - \cot\varepsilon_1\right)\cot\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{3} = 0$; setzen wir $\frac{a+b}{2h_a} = \cot\varphi$ (2), so ist $\cot\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{4}{3}\frac{\sin(\varepsilon_1 - \varphi)}{\sin\varphi\sin\varepsilon_1}\cot\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{3} = 0$ (3). b) Aus (c) ergiebt sich $\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} + 2\cot\varepsilon_1 = \frac{a+b}{h_a} - \frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}$, mithin $\left(\frac{a+b}{2h_a} - \cot\varepsilon_1\right)\sin\gamma - \cos\gamma = \frac{1}{2}$; hierin $\frac{a+b}{2h_a} = \cot\varphi$ (2) gesetzt, giebt $\frac{\sin(\varepsilon_1 - \varphi)}{\sin\varepsilon_1\sin\varphi}\sin\gamma - \cos\gamma = \frac{1}{2}$ (3′).

228. $a + b, h_a, \angle (a t_a)$ (227).

229. $a - b, h_a, t_a$. Aufl. $\sin \varepsilon_1 = \frac{h_a}{t_a}$ (1). Wie in 227 ergiebt sich $\cot \beta = \cot \gamma + 2 \cot \varepsilon_1$ (a); ferner aus $(a - b) \cos \frac{1}{2} \gamma = c \sin \frac{1}{2} \delta$ und $h_a = c \sin \beta$ folgt $\cot \beta = \frac{a - b}{h_a} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$ (b); und aus (a) und (b) $\cot \gamma + 2 \cot \varepsilon_1 = \frac{a - b}{h_a} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$, woraus wieder γ auf zwei verschiedene Weisen zu bestimmen ist. a) $\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma} + 2 \cot \varepsilon_1 = \frac{a - b}{h_a} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$, oder $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{a - b}{2 h_a} - \cot \varepsilon_1\right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{3} = 0$, hierin $\frac{a - b}{2 h_a} = \cot \varphi$ (2) gesetzt, giebt $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{4}{3} \frac{\sin (\varepsilon_1 - \varphi)}{\sin \varepsilon_1 \sin \varphi} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{3} = 0$ (3). b) Aus (c) ergiebt sich $\frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} - \left(\frac{a - b}{h_a} - 2 \cot \varepsilon_1\right) = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin \gamma} = \frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma}$ oder $\cos \gamma - \left(\frac{a - b}{2 h_a} - \cot \varepsilon_1\right) \sin \gamma = \frac{1}{2}$; wird $\frac{a - b}{2 h_a} = \cot \varphi$ (2) gesetzt, so ist $\cos \gamma - \frac{\sin (\varepsilon_1 - \varphi)}{\sin \varepsilon_1 \sin \varphi} \sin \gamma = \frac{1}{2}$ (3').

230. $a - b, h_a, \angle (a, t_a)$ (229).

§. 17.

Aufgaben, in denen Verhältnisse gegeben.

A. Die meisten Aufgaben der §§. 14 und 15 können auch zur Bildung von Verhältniß-Aufgaben benutzt werden. Zunächst die unter B), in denen zwei Linien und ein Winkel gegeben; ist nun statt der beiden Linien das Verhältniß derselben gegeben und der Winkel, so ist dadurch die Gestalt des Dreiecks bestimmt, d. h. die Winkel können berechnet werden; zur vollständigen Berechnung des Dreiecks muß dann noch ein Stück gegeben sein, das aber in dem Verhältniß nicht vorkommt. So ist z. B. in §. 14 Aufgabe 15 die folgende: $r, a + b, \gamma$; um hieraus eine Verhältniß-Aufgabe zu bilden, könnte man $r : a + b, \gamma$ mit einem der folgenden Elemente verbinden, c, $a - b$, s, $s - c$, h_a, h_c, $h_b \pm h_a$, p, $p - q$, w_c, u, $u - v$, $\triangle$, $a^2 \pm b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$, ab, ϱ, ϱ_c, $\varrho_c \pm \varrho$, $\varrho_a \pm \varrho_b$, $h_c + \varrho_c$, $h_c - \varrho$;

nachdem die Winkel berechnet, sind die Aufgaben nach §. 14, A oder §. 15, A zu lösen.

Aus den Aufgaben der §§. 14 und 15, C, in denen sich unter den gegebenen Elementen kein Winkel befindet, aber aus zwei Elementen sofort ein Winkel berechnen läßt, können auf doppelte Weise Verhältniß-Aufgaben gebildet werden. Einmal kann nämlich nur ein Verhältniß und zwar das der beiden Elemente, welche zur directen Berechnung des Winkels dienen, gegeben sein; ferner das in der Aufgabe selber gegebene Element, und als drittes ist noch ein neues hinzuzunehmen. Die Aufgaben können also in diesem Fall auf die der §§. 14 und 15, B zurückgeführt werden.

Dann können aber aus den Aufgaben der §§. 14 und 15, C, ebenso wie aus denen unter D auch so Verhältniß-Aufgaben gebildet werden, daß das Verhältniß aller drei in der Aufgabe vorkommenden Elemente als gegeben angenommen und noch ein neues Element hinzugenommen wird. Aus den beiden gegebenen Verhältnissen sind dann wie in den §§. 14 und 15 die Winkel, und mit Hinzunahme des dritten Elementes dann nach §§. 14 und 15, A die fehlenden Dreiecksstücke zu berechnen. Sollte in den Auflösungen der §§. 14 und 15 zunächst eine Seite berechnet sein, so ist zu beachten, daß in den vorliegenden Aufgaben das Verhältniß der Seite gefunden wird, in welchem sie zu einem der Elemente steht, deren Verhältniß gegeben. So kann man z. B. aus §. 15, 65 die Verhältniß-Aufgabe $s - c : \varrho_a + \varrho_b, \gamma$ bilden; man findet nun nicht sogleich c, wie dort angegeben, vielmehr $c : \varrho_a + \varrho_b$, und hieraus und aus $s - c : \varrho_a + \varrho_b$ wiederum $s - c : c$, wodurch dann δ zu berechnen ist. Endlich ist noch darauf aufmerksam zu machen, daß, wenn eins der Elemente $\triangle$, ab, $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$ ein Glied des gegebenen Verhältnisses ist, das andere Glied das Quadrat einer Linie sein muß, wenn es nicht eins der vorher erwähnten Elemente selber ist.

B. In den folgenden Aufgaben ist ein Verhältniß gegeben, und außerdem noch zwei Elemente, unter denen sich aber kein Winkel befindet. Die Aufgaben sind dadurch zu lösen, daß man das gegebene Verhältniß durch γ und $\alpha - \beta = \delta$ ausdrückt, und ferner sich eine zweite Gleichung für γ und δ durch Division der beiden außerdem noch gegebenen Elemente verschafft; aus beiden Gleichungen ist dann γ oder δ zu eliminiren. Statt γ und δ kann man auch zwei andere Winkel, etwa α und β benutzen.

a) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a : b = m : n}$ das gegebene Verhältniß. Ist c oder $u - v$ noch gegeben, so ist zu beachten, daß in beiden Fällen auch u und v bekannt ist, da $a : b = u : v$, mithin

u und v zu berechnen ist aus $m + n : m = c : u$ oder aus $m - n : m = u - v : u$; daher diese Aufgaben leicht auf frühere in §. 14 zurückzuführen sind. Für die übrigen Aufgaben ist zu beachten, daß $\frac{m+n}{m-n} = \cot \frac{1}{2}\gamma \cot \frac{1}{2}\delta$ ist.

Außer **a : b = m : n** ist noch gegeben:

1. c, h_c (§. 14, 568)
2. $h_c, u - v$ (§. 14, 568)
3. $c, \triangle$ (§. 14, 608)
4. $h_c, \triangle$ (§. 14, 608)
5. $u - v, \triangle$ (§. 14, 608)
6. c, w_c (§. 14, 607)
7. $u - v, w_c$ (§. 14, 607)
8. c, t_c (§. 14, 603)
9. $u - v, t_c$ (§. 14, 603)
10. $r, u - v$ (§. 14, 320)
11. p, q (§. 14, 582)
12. $p - q, u - v$ (§. 14, 582).

13. $p - q, h_c$. 1. Aufl. $\sin\gamma = \frac{(m^2 - n^2) h_c}{mn (p - q)}$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{2 mn (p - q)}{(m^2 - n^2) h_c} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma + 1 = 0$. 3. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{2 mn (p - q)}{h_c (m + n)^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta + \left[\frac{m - n}{m + n}\right]^2 = 0$.

14. h_c, t_c (13).
15. $p - q, t_c$ (13).

16. $t_c, \triangle$. 1. Aufl. $2 mn t_c^2 \sin\gamma - 2 mn \triangle \cos\gamma = \triangle (m^2 + n^2)$. 2. Aufl. Wird t_c um sich selber verlängert, so ist die Aufgabe auf (3) zurückgeführt.

17. r, h_c. Aufl. $\sin\alpha \sin\beta = \frac{h_c}{2 r}$; $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{m}{n}$.

18. ϱ, h_c. 1. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\delta = \frac{m - n}{2\varrho}\sqrt{\frac{h_c (h_c - 2\varrho)}{mn}}$. 2. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta} = \frac{\varrho}{h_c - \varrho}$, $\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{m + n}{m - n} \cdot \frac{\varrho}{h_c - \varrho}$, also γ und δ nach 9, 4 zu berechnen.

19. ϱ_c, h_c. 1. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{m + n}{2 (h_c + \varrho_c)}\sqrt{\frac{h_c (h_c + 2\varrho_c)}{mn}}$. 2. Aufl. $\frac{h_c + \varrho_c}{\varrho_c} = \frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$ und $\frac{m - n}{m + n} \cdot \frac{h_c + \varrho_c}{\varrho_c} = \frac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$; also γ und δ nach §. 9, 4 zu berechnen.

20. ϱ, ϱ_c. 1. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{m + n}{\varrho_c + \varrho}\sqrt{\frac{\varrho\varrho_c}{mn}}$. 2. Aufl. $\frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} = \frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$ und $\frac{m - n}{m + n} \cdot \frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} = \frac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$, also γ und δ nach §. 9, 4 zu berechnen.

21. ϱ_a, ϱ_b. 1. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{m - n}{\varrho_a - \varrho_b}\sqrt{\frac{\varrho_a \varrho_b}{mn}}$. 2. Aufl.

$\frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_a - \varrho_b} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{m-n}{m+n} \cdot \frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_a - \varrho_b} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$, also γ und δ nach §. 9, 4 zu berechnen.

22. c, $h_b + h_a$ (§. 14, 610). 24. c, $h_b - h_a$ (§. 14, 611).

23. u — v, $h_b + h_a$ (§. 14, 610). 25. u — v, $h_b - h_a$ (§. 14, 611).

b) In den folgenden Aufgaben ist **p : q = m : n** das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m}{n} = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}$ und $\frac{m+n}{m-n} = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}$. Außer **p : q = m : n** ist noch gegeben:

26. a, b. 1. Aufl. $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ und $\frac{na}{mb} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ (§. 9, 3). 2. Aufl. $\cos\alpha = \frac{n}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{m^2 - n^2}}$.

27. ϱ, h_c. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} \cdot \frac{h_c - \varrho}{\varrho} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{\varrho}{h_c - \varrho} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$ (§. 9, 4).

28. ϱ_c, h_c. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} \cdot \frac{h_c + \varrho_c}{\varrho_c} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{\varrho_c}{h_c + \varrho_c} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$ (§. 9, 4).

29. ϱ, ϱ_c. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} \cdot \frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_c + \varrho} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$ (§. 9, 4).

30. ϱ_a, ϱ_b. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} \cdot \frac{\varrho_a - \varrho_b}{\varrho_a + \varrho_b} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_a - \varrho_b} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$ (§. 9, 4).

31. a — b, u — v. 1. Aufl. $\frac{a-b}{u-v} \cdot \frac{m+n}{m-n} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{u-v}{a-b} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$ (§. 9, 4). 2. Aufl. $p - q = \frac{(a-b)^2}{u-v}$ (§. 14, 582).

32. r, h_c. Aufl. $\sin\alpha^4 + \frac{h_c^2\,(m^2 - n^2)}{4\,r^2 n^2}\sin\alpha^2 - \frac{m^2 h_c^2}{4\,n^2 r^2} = 0$

c) In den folgenden Aufgaben ist **c : h$_c$ = m : n** das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\sin\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta^2 - \sin \frac{1}{2}\gamma^2}$. Außer **c : h$_c$ = m : n** ist noch gegeben:

33. a, b. Aufl. $\sin \delta = \frac{n(a^2 - b^2)}{mab}$.

34. a — b, u — v. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{m\{(a-b)^2 - (u-v)^2\}}{2n(u-v)^2}$.

35. a — b, p — q. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{m\{(p-q)^2 - (a-b)^2\}}{2n(a-b)^2}$.

36. p — q, u — v. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{m\{(p-q) - (u-v)\}}{2n(u-v)}$.

37. ϱ, ϱ_c. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{n(\varrho_c - \varrho)^2}{2m\varrho_c\varrho}$.

38. ϱ_a, ϱ_b. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2m\varrho_a\varrho_b}{n(\varrho_a + \varrho_b)^2}$.

39. t_c, $\triangle$. Aufl. $\operatorname{tg} \gamma = \frac{4n\triangle}{2nt_c^2 - m\triangle}$.

40. r, t_c. Aufl. $4nr^2 \sin 2\gamma - mr^2 \cos 2\gamma = m(2t_c^2 - r^2)$ (§. 3, 1).

d) In den folgenden Aufgaben ist $c : w_c = m : n$ das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\sin\gamma \cos \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\delta^2 - \sin \frac{1}{2}\gamma^2}$. Außer $c : w_c = m : n$ ist noch gegeben:

41. a, b. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{4n^2a^2b^2 - m^2(a+b)^2(a-b)^2}}{m(a+b)^2}$.
2. Aufl. $\cos\gamma = \frac{n^2(a+b)^2(a^2+b^2) - 2m^2a^2b^2}{2ab\{n^2(a+b)^2 + m^2ab\}}$. 3. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\delta = \frac{n(a^2 - b^2)}{2mab}$.

42. a — b, p — q. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{m\{(p-q)^2 - (a-b)^2\}}{2n(p-p)(a-b)}$.

43. u — v, a — b (42). 44. p — q, u — v (42).

45. ϱ, ϱ_c. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{2m\varrho\varrho_c}{n(\varrho_c^2 - \varrho^2)}$.

46. ϱ, h_c. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{mh_c(h_c - 2\varrho)}{2n\varrho(h_c - \varrho)}$.

47. ϱ_c, h_c. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{mh_c(h_c + 2\varrho_c)}{2n\varrho_c(h_c + \varrho_c)}$.

e) In den folgenden Aufgaben ist $c : t_c = m : n$ das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m^2}{4n^2} = \frac{\sin\gamma^2}{1 + 2\cos\delta\cos\gamma + \cos\gamma^2}$; zuweilen

kann man sich auch mit Vortheil des Ausdrucks $\frac{4 n^2 + m^2}{2 m^2} = \frac{1 + \cos\gamma \cos\delta}{\sin\gamma^2}$ bedienen. Außer **c : t**$_c$ = **m : n** ist noch gegeben:

48. a, b. 1. Aufl. $\cos\gamma = \frac{(a^2 + b^2)(4 n^2 - m^2)}{2 ab (4 n^2 + m^2)}$. 2. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{m^2 (a + b)^2 - 4 n^2 (a - b)^2}{4 n^2 (a + b)^2 - m^2 (a - b)^2}$.

49. a — b, u — v. Aufl. $\cos\gamma^2 - \frac{2 m^2 \{(u - v)^2 - (a - b)^2\}}{(4n^2+m^2)(u-v)^2 - 2m^2(a-b)^2}$ $\cos\gamma - \frac{(4 n^2 - m^2)(u - v)^2}{(4 n^2 + m^2)(u - v)^2 - 2 m^2 (a - b)^2} = 0.$

50. a — b, p — q (49) 51. u — v, p — q (49).

52. ϱ, ϱ_c. Aufl. $\cos\gamma^2 + \frac{8 m^2 \varrho_c \varrho}{(4 n^2 + m^2)(\varrho_c - \varrho)^2 - 2 m^2 (\varrho_c + \varrho)^2}$ $\cos\gamma - \frac{(4 n^2 - m^2)(\varrho_c - \varrho)^2}{(4 n^2 + m^2)(\varrho_c - \varrho)^2 - 2 m^2 (\varrho_c + \rho)^2} = 0.$

53. h_c, ϱ. Aufl. $\cos\gamma^2 + \frac{2 m^2 h_c (h_c - 2 \varrho)}{\varrho^2 (4 n^2 - m^2) - 2 m^2 h_c (h_c - 2 \varrho)}$ $\cos\gamma - \frac{\varrho^2 (4 n^2 - m^2)}{\rho^2 (4 n^2 - m^2) - 2 m^2 h_c (h_c - 2 \varrho)} = 0.$

54. h_c, ϱ_c. Aufl. $\cos\gamma^2 + \frac{2 m^2 h_c (h_c + 2 \varrho_c)}{\varrho_c^2 (4n^2+m^2) - 2m^2 (h_c+\varrho_c)^2} \cos\gamma - \frac{\varrho_c^2 (4 n^2 - m^2)}{\varrho_c^2 (4 n^2 - m^2) - 2 m^2 (h_c + \varrho_c)^2} = 0.$

f) In den folgenden Aufgaben ist **c : a + b = m : n** das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \delta}$. Die Aufgaben 58 bis 72 können noch auf eine andere Art gelöst werden, indem man sie auf frühere in den §§. 14 und 15 zurückführt; aus den Formeln $(a + b)(a - b) = c (p - q)$ und $(a - b)^2 = (p - q)(u - v)$ folgt nämlich: $\frac{m}{n} = \frac{a - b}{p - q} = \frac{u - v}{a - b} = \sqrt{\frac{u - v}{p - q}}$, so daß, wenn in den Aufgaben a — b, p — q oder u — v eins der gegebenen Elemente ist, die beiden andern berechnet werden können. Außer **c : a + b = m : n** ist noch gegeben:

55. r, w_c. Aufl. $\sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{m n w_c}{2 r (n^2 - m^2)}$.

56. ϱ, w_c. Aufl. $\cos \frac{1}{2} \delta = \frac{\varrho (n + m)}{m w_c}$.

57. ϱ_c, w_c. Aufl. $\cos \frac{1}{2} \delta = \frac{\varrho_c (n - m)}{m w_c}$.

58. r, u — v. 1. Aufl. $\sin \delta = \frac{n^2 (u - v)}{2 r m^2}$. 2. Aufl. (§. 14, 328, 332).

59. h_c, p — q. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(n^2 - m^2)(p - q)}{2 n^2 h_c}$. 2. Aufl. (§. 14, 509.)

60. h_c, t_c (59). 61. t_c, p — q (59).

62. h_c, u — v. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(n^2 - m^2)(u - v)}{2 m^2 h_c}$. 2. Aufl. §. 14, 508.

63. $h_b - h_a$, p — q. 1. Aufl. $\sin \gamma = \frac{n (h_b - h_a)}{m (p - q)}$. 2. Aufl. §. 14, 373.

64. $h_b - h_a$, u — v. 1. Aufl. $\sin \gamma = \frac{m (h_b - h_a)}{n (u - v)}$. 2. Aufl. §. 14, 375.

65. p — q, ϱ. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{m (n - m)(p - q)}{2 n^2 \varrho}$. 2. Aufl. §. 15, 681.

66. p — q, ϱ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{m (n + m)(p - q)}{2 n^2 \varrho_c}$. 2. Aufl. §. 15, 682.

67. a — b, h_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(n^2 - m^2)(a - b)}{2 m n h_c}$. 2. Aufl. §. 14, 508, 509.

68. a — b, w_c. 1. Aufl. $\sin \frac{1}{2} \delta = \frac{(n^2 - m^2)(a - b)}{2 m n w_c}$. 2. Aufl. §. 14, 507.

69. a — b, ϱ. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(n - m)(a - b)}{2 n \varrho}$. 2. Aufl. §. 15, 681.

70. a — b, ϱ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(n + m)(a - b)}{2 n \varrho_c}$. 2. Aufl. §. 15, 682.

71. u — v, ϱ. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(n - m)(u - v)}{2 m \varrho}$. 2. Aufl. §. 15, 687.

72. u — v, ϱ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{(n + m)(u - v)}{2 m \varrho_c}$. 2. Aufl. §. 15, 688.

73. r, h_c. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = m\sqrt{\frac{h_c}{2r(n^2 - m^2)}}$.

74. r, $h_b + h_a$. Aufl. $\sin \gamma = \sqrt{\frac{m(h_b + h_a)}{2nr}}$.

75. r, p. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{m\rho}{2r(n - m)}}$.

76. r, ϱ_c. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{m\varrho_c}{2r(n + m)}}$.

77. h_c, $h_b + h_a$. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(n^2 - m^2)(h_b + h_a)}{m.n h_c}}$.

78. h_c, ϱ_a. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{(n^2 - m^2)(\varrho_a - h_c)^2}{n^2 h_c (2\varrho_a - h_c)}$. 2. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta} = \frac{m}{n}$; $\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{\varrho_a}{\varrho_a - h_c}$ (§. 9, 4).

79. $h_b + h_a$, ϱ. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(n - m)(h_b + h_a)}{n\varrho}}$.

80. $h_b + h_a$, ϱ_c. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(n + m)(h_b + h_a)}{n\rho_c}}$.

81. ρ_a, ρ_b. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2m}{\varrho_a + \varrho_b}\sqrt{\frac{\varrho_a\varrho_b}{4n^2 - m^2}}$. 2. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta} = \frac{m}{n}$; $\frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_a - \varrho_b}$ (§. 9, 4).

82. r, ϱ_a. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\gamma^4 - \left[1 - \frac{m^2\varrho_a}{r(n^2 - m^2)}\right]\cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{m^2\rho_a^2}{4r^2(n^2 - m^2)} = 0$.

g) In den folgenden Aufgaben ist **c : a — b = m : n** das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$. Die Aufgaben 83 bis 90 können auch noch auf eine zweite Art gelöst werden, indem sie auf frühere in den §§. 14 und 15 zurückgeführt werden; aus der Formel $c(p - q) = (a + b)(a - b)$ folgt $\frac{m}{n} = \frac{a + b}{p - q}$, so daß, wenn eins der Elemente $a + b$ oder $p - q$ gegeben, das andere berechnet werden kann. Außer **c : a — b = m : n** ist noch gegeben:

83. h_c, p — q. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{2n^2 h_c}{(m^2 - n^2)(p - q)}$. 2. Aufl. §. 14, 477.

84. h_c, t_c (83). 85. t_c, p — q (83).

86. $h_b + h_a$, $p - q$. 1. Aufl. $\sin\gamma = \frac{n(h_b + h_a)}{m(p - q)}$. 2. Aufl. §. 14, 357.

87. h_c, $a + b$. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{2mnh_c}{(m^2 - n^2)(a + b)}$. 2. Aufl. §. 14, 477.

88. $a + b$, w_c. 1. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{(m^2 - n^2)(a + b)}{2mnw_c}\sin\frac{1}{2}\delta - 1 = 0$. 2. Aufl. §. 14, 483.

89. $p - q$, ρ_a. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{2n^2\rho_a}{m(m + n)(p - q)}$. 2. Aufl. §. 15, 660.

90. $a + b$, ρ_a. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{2n\rho_a}{(m + n)(a + b)}$. 2. Aufl. §. 15, 660.

91. w_c, ρ_a. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\delta = \frac{(m - n)\rho_a}{mw_c}$.

92. $h_b - h_a$, $u - v$. Aufl. $\sin\delta = \frac{n(h_b - h_a)}{m(u - v)}$.

93. r, h_c. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = m\sqrt{\frac{h_c}{2r(m^2 - n^2)}}$.

94. r, $h_b - h_a$. Aufl. $\sin\gamma = \sqrt{\frac{m(h_b - h_a)}{2nr}}$.

95. r, ρ_a. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{m\rho_a}{2r(m + n)}}$.

96. h_c, $h_b - h_a$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(m^2 - n^2)(h_b - h_a)}{mnh_c}}$.

97. h_c, ρ. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(m^2 - n^2)\rho^2}{m^2h_c(h_c - 2\rho)}$. 2. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{m}{n}$; $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{\rho}{h_c - \rho}$ (§. 9, 4).

98. h_c, ρ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(m^2 - n^2)\rho_c^2}{m^2h_c(h_c + 2\rho_c)}$. 2. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{m}{n}$; $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{\rho_c}{h_c + \rho_c}$ (§. 9, 4).

99. $h_b - h_a$, ρ_a. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(m + n)(h_b - h_a)}{n\rho_a}}$.

100. ρ, ρ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(m^2 - n^2)(\rho_c - \rho)}{4m^2\rho\rho_c}$. 2. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{m}{n}$; $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c + \rho}$ (§. 9, 4).

101. h_c, $u - v$. Aufl. $(m^2 - n^2)(u - v)\sin\delta - 2m^2h_c\cos\delta = 2h_c(2n^2 - m^2)$ (§. 3, 1).

102. r, w_c. Aufl. $\cos{}^1/_2\delta^2 + \frac{w_c n^2}{2r(m^2 - n^2)}\cos{}^1/_2\delta - 1 = 0$.

103. r, ϱ. 1. Aufl. $\sin{}^1/_2\gamma^4 - \left(1 - \frac{m^2\varrho}{(m^2 - n^2)r}\right)\sin{}^1/_2\gamma^2 + \frac{\varrho^2 m^2}{4r^2(m^2 - n^2)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\gamma^2 - \frac{2m^2\varrho}{(m^2-n^2)r}\cos\gamma + \frac{m^2\varrho(\varrho + 2r)}{(m^2 - n^2)r^2} - 1 = 0$.

104. r, ϱ_c. 1. Aufl. $\sin{}^1/_2\gamma^4 - \left(1 + \frac{m^2\varrho_c}{(m^2 - n^2)r}\right)\sin{}^1/_2\gamma^2 + \frac{m^2\varrho_c^2}{4r^2(m^2 - n^2)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\gamma^2 + \frac{2m^2\varrho_c}{(m^2-n^2)r}\cos\gamma - \frac{m^2\varrho_c(2r - \varrho_c)}{(m^2 - n^2)r^2} - 1 = 0$.

h) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a + b : p - q = m : n}$ das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\cos{}^1/_2\gamma}{\sin{}^1/_2\delta}$. Die Aufgaben 105 bis 117 können noch auf frühere in den §§. 14 und 15 zurückgeführt werden; aus der Formel $(a + b)(a - b) = c(p - q)$ folgt nämlich: $\frac{m}{n} = \frac{c}{a - b}$; so daß, wenn eine der Größen c oder $a - b$ gegeben ist, die andere leicht berechnet werden kann. Die Aufgaben 120 bis 133 sind ganz ebenso wie die von g) zu lösen, da auch hier das gegebene Verhältniß $= \frac{\cos{}^1/_2\gamma}{\sin{}^1/_2\delta}$ ist. Außer $\mathbf{a + b : p - q = m : n}$ ist noch gegeben:

105. c, h_c. 1. Aufl. $\mathrm{tg}\,{}^1/_2\gamma = \frac{c(m^2 - n^2)}{2m^2h_c}$. 2. Aufl. §. 14, 452.

106. $a - b$, h_c. 1. Aufl. $\mathrm{tg}\,{}^1/_2\gamma = \frac{(m^2 - n^2)(a - b)}{2mnh_c}$. 2. Aufl. §. 14, 452.

107. c, $\triangle$. 1. Aufl. $\mathrm{tg}\,{}^1/_2\gamma = \frac{c^2(m^2 - n^2)}{4m^2\triangle}$. 2. Aufl. §. 14, 453.

108. $a - b$, $\triangle$. 1. Aufl. $\mathrm{tg}\,{}^1/_2\gamma = \frac{(m^2 - n^2)(a - b)^2}{4n^2\triangle}$. 2. Aufl. §. 14, 453.

109. c, $h_b - h_a$. 1. Aufl. $\sin\gamma = \frac{m(h_b - h_a)}{nc}$. 2. Aufl. §. 14, 368.

110, c, $h_b + h_a$. 1. Aufl. $\sin\delta = \frac{n\,(h_b + h_a)}{m\,c}$. 2. Aufl. §. 14, 457.

111. $a - b$, $h_b + h_a$. 1. Aufl. $\sin\delta = \frac{n^2\,(h_b + h_a)}{m^2\,(a - b)}$. 2. Aufl. §. 14, 457.

112. c, ϱ. 1. Aufl. $\cot {}^1/_2\,\delta = \frac{4\,m^2\,\varrho^2 + c^2\,(m^2 - n^2)}{4\,m\,n\,c\,\varrho}$. 2. Aufl. §. 15, 322.

113. $a - b$, ϱ. 1. Aufl. $\cot {}^1/_2\,\delta = \frac{4\,n^2\,\varrho^2 + (m^2 + n^2)\,(a - b)^2}{4\,n^2\,\varrho\,(a - b)}$. 2. Aufl. §. 15, 322.

114. c, ϱ_c. 1. Aufl. $\cot {}^1/_2\,\delta = \frac{4\,m^2\,\varrho_c^{\,2} + c^2\,(m^2 - n^2)}{4\,m\,n\,c\,\varrho_c}$. 2. Aufl. §. 15, 335.

115. $a - b$, ϱ_c. 1. Aufl. $\cot {}^1/_2\,\delta = \frac{4\,n^2\,\varrho_c^{\,2} + (m^2 - n^2)\,(a - b)^2}{4\,n^2\,\varrho_c\,(a - b)}$. 2. Aufl. §. 15, 335.

116. c, ϱ_a. 1. Aufl. $\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\gamma = \frac{c\,(m + n)}{2\,m\,\varrho_a}$. 2. Aufl. §. 15, 679.

117. $a - b$, ϱ_a. 1. Aufl. $\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\gamma = \frac{(m + n)\,(a - b)}{2\,n\,\varrho_a}$. 2. Aufl. §. 15, 679.

118. c, w_c. Aufl. $\cos {}^1/_2\,\gamma^4 - \frac{c^2\,(m^2 - n^2)^2 + 4\,m^2\,w_c^{\,2}\,(m^2 + n^2)}{4\,m^2\,n^2\,w_c^{\,2}}$ $\cos {}^1/_2\,\gamma^2 + \frac{m^2}{n^2} = 0.$

119. $a - b$, w_c. Aufl. $\cos {}^1/_2\,\gamma^4 - \frac{4\,n^2\,w_c^{\,2}\,(m^2 + n^2) + (m^2 - n^2)^2\,(a - b)^2}{4\,n^4\,w_c^{\,2}}$ $\cos {}^1/_2\,\gamma^2 + \frac{m^2}{n^2} = 0.$

120. w_c, ϱ_a (91)	125. h_c, $h_b - h_a$ (96)	130. h_c, $u - v$ (101)
121. $h_b - h_a$, $u - v$ (92)	126. h_c, ϱ (97)	131. r, w_c (102)
122. r, h_c (93)	127. h_c, ϱ_c (98)	132. r, p (103)
123. r, $h_b - h_a$ (94)	128. $h_b - h_a$, ϱ_a (99)	133. r, ϱ_c (104).
124. r, ϱ_a (95)	129. ϱ, ϱ_c (100)	

i) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{a - b : p - q = m : n}$ das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\sin {}^1/_2\,\gamma}{\cos {}^1/_2\,\delta}$. In den Aufgaben 134 bis 136 ist $u - v$ gegeben; da durch $\frac{m}{n} = \frac{u - v}{a - b} = \sqrt{\frac{u - v}{p - q}}$ eins der Elemente $a - b$ oder $p - q$ berechnet werden kann, so können sie

auch noch auf frühere in §. 14 zurückgeführt werden. Dasselbe ist bei den Aufgaben 137 bis 151 der Fall, in denen c oder a + b eins der gegebenen Elemente ist; da $(a+b)(a-b) = c(p-q)$, also $\frac{m}{n} = \frac{c}{a+b}$ ist, so kann, wenn eine der Größen c oder a + b gegeben ist, die andere leicht berechnet und so die Aufgabe auf eine frühere zurückgeführt werden. Die Aufgaben 152 bis 164 sind ebenso wie die von f) zu lösen, da auch hier das gegebene Verhältniß = $\frac{\sin {}^1/_2\gamma}{\cos {}^1/_2\delta}$ ist. Außer **a — b : p — q = m : n** ist noch gegeben:

134. r, u — v. 1. Aufl. 58. 2. Aufl. §. 14, 331.

135. $h_b - h_a$, u — v. 1. Aufl. 64. 2. Aufl. §. 14, 376, 378.

136. h_c, u — v. 1. Aufl. 62. 2. Aufl. §. 14, 515, 516.

137. c, $h_b + h_a$. 1. Aufl. $\sin\gamma = \frac{m(h_b+h_a)}{nc}$. 2. Aufl. §. 14, 354.

138. c, h_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\gamma = \frac{2m^2 h_c}{c(n^2-m^2)}$. 2. Aufl. §. 14, 450.

139. a + b, h_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\gamma = \frac{2mnh_c}{(n^2-m^2)(a+b)}$. 2. Aufl. §. 14, 450.

140. c, △. 1. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\gamma = \frac{4m^2\triangle}{c^2(n^2-m^2)}$. 2. Aufl. §. 14, 451.

141. a + b, △. 1. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\gamma = \frac{4n^2\triangle}{(n^2-m^2)(a+b)^2}$. 2. Aufl. §. 14, 451.

142. c, $h_b - h_a$. 1. Aufl. $\sin\delta = \frac{n(h_b-h_a)}{mc}$. 2. Aufl. §. 14, 455.

143. a + b, $h_b - h_a$. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\delta = \frac{n^2(h_b-h_a)}{m^2(a+b)}$. 2. Aufl. §. 14, 455.

144. c, w_c. 1. Aufl. $\cos {}^1/_2\gamma = \frac{c(n^2-m^2)}{2mnw_c}$. 2. Aufl. §. 14, 454.

145. a + b, w_c. 1. Aufl. $\cos {}^1/_2\gamma = \frac{(n^2-m^2)(a+b)}{2n^2w_c}$. 2. Aufl. §. 14, 454.

146. c, ϱ. 1. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\gamma = \frac{2m\varrho}{c(n-m)}$. 2. Aufl. §. 15, 323.

147. a + b, ϱ. 1. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\gamma = \frac{2n\varrho}{(n-m)(a+b)}$. 2. Aufl. §. 15, 323.

148. c, ϱ_c. 1. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\gamma = \frac{2m\varrho_c}{c(m+n)}$. 2. Aufl. §. 15, 309.

149. $a + b, \varrho_c$. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{2 n \varrho_c}{(m + n)(a + b)}$. 2. Aufl. §. 15, 309.

150. c, ϱ_a. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{4 m^2 \varrho_a^2 - c^2 (n^2 - m^2)}{4 m n c \varrho_a}$. 2. Aufl. §. 15, 308.

151. $a + b, \varrho_a$. 1. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \frac{4 n^2 \varrho_a^2 - (n^2 - m^2)(a + b)^2}{4 n^2 \varrho_a (a + b)}$. 2. Aufl. §. 15, 308.

152. r, w_c (55)
153. w_c, ϱ (56)
154. w_c, ϱ_c (57)
155. r, h_c (73)
156. $r, h_b + h_a$ (74)
157. r, ϱ (75)
158. r, ϱ_c (76)
159. $h_c, h_b + h_a$ (77)
160. h_c, ϱ_a (78)
161. $h_b + h_a, \varrho$ (79)
162. $h_b + h_a, \varrho_c$ (80)
163. ϱ_a, ϱ_b (81)
164. r, ϱ_a (82).

k) In den folgenden Aufgaben ist $u - v : a - b = m : n$ das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m}{n} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$. In den Aufgaben 165 bis 170 ist $p - q$ gegeben; da durch $\frac{m}{n} = \frac{a - b}{p - q} = \sqrt{\frac{u - v}{p - q}}$ eins der Elemente $a - b$ oder $u - v$ berechnet werden kann, so können sie auf frühere in §. 14 und 15 zurückgeführt werden. Dasselbe ist bei den Aufgaben 173 bis 187 der Fall, in denen c oder $a + b$ eins der gegebenen Elemente ist; denn das eine kann aus dem anderen durch $\frac{m}{n} = \frac{c}{a + b}$ berechnet werden. Die erwähnten Aufgaben, so wie 188 bis 200 sind theils ebenso wie die von f), theils wie die von i) zu lösen. Außer $u - v : a - b = m : n$ ist noch gegeben:

165. $h_c, p - q$ (59)
166. h_c, t_c (60)
167. $t_c, p - q$ (61)
168. $h_b - h_a, p - q$ (63)
169. $p - q, \varrho$ (65)
170. $p - q, \varrho_c$ (66).

171. $a + b, p - q$. 1. Aufl. $\frac{m}{n} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$; $\frac{a + b}{p - q} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$ §. 9, 4. 2. Aufl. §. 14, 473.

172. p, q. 1. Aufl. $\frac{m}{n} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$; $\frac{n (p + q)}{m (p - q)} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$ §. 9, 4. 2. Aufl. §. 14, 473.

173. $c, h_b + h_a$ (137)
174. c, h_c (138)
175. $a + b, h_c$ (139)
176. $c, \triangle$ (140)
177. $a + b, \triangle$ (141)
178. $c, h_b - h_a$ (142)
179. $a + b, h_b - h_a$ (143)
180. c, w_c (144)
181. $a + b, w_c$ (145)
182. c, ϱ (146)
183. $a + b, \varrho$ (147)
184. c, ϱ_c (148)
185. $a + b, \varrho_c$ (149)
186. c, ϱ_a (150)
187. $a + b, \varrho_a$ (151)
188. r, w_c (55)
189. w_c, ϱ (56)
190. w_c, ϱ_c (57)

191. r, h_c (73)
192. r, $h_b + h_a$ (74)
193. r, ϱ (75)
194. r, ϱ_c (76)
195. h_c, $h_b + h_a$ (77)
196. h_c, ϱ_a (78)
197. $h_b + h_a$, ϱ (79)
198. $h_b + h_a$, ϱ_c (80)
199. ϱ_a, ϱ_b (81)
200. r, ϱ_c (82).

l) In den folgenden Aufgaben ist $u - v : p - q = m : n$ das gegebene Verhältniß; es ist $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sin{}^1/_2\gamma}{\cos{}^1/_2\delta}$. Die Aufgaben können ebenso wie die von k) auf die von f) und i) zurückgeführt werden, unter Berücksichtigung der Formeln $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{a-b}{p-q} = \frac{u-v}{a-b}$ und $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{c}{a+b}$. Außer $u - v : a - b = m : n$ ist noch gegeben:

201. a, b. Aufl. $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{c}{a+b}$, also a, b, c bekannt.
202. c, a — b. Aufl. wie 201.
203. h_c, a — b (67)
204. a — b, w_c (68)
205. a — b, p (69)
206. a — b, ϱ_c (70)
207. c, $h_b + h_a$ (137)
208. c, h_c (138)
209. a + b, h_c (139)
210. c, $\triangle$ (140)
211. a + b, $\triangle$ (141)
212. c, $h_b - h_a$ (142)
213. a + b, $h_b - h_a$ (143)
214. c, w_c (144)
215. a + b, w_c (145)
216. c, ϱ (146)
217. a + b, ϱ (147)
218. c, ϱ_c (148)
219. a + b, ϱ_c (149)
220. c, ϱ_a (150)
221. a + b, ϱ_a (151)
222. r, w_c (55)
223. w_c, ϱ (56)
224. w_c, ϱ_c (57)
225. r, h_c (73)
226. r, $h_b + h_a$ (74)
227. r, ϱ (75)
228. r, ϱ_c (76)
229. h_c, $h_b + h_a$ (77)
230. h_c, ϱ_a (78)
231. $h_b + h_a$, ϱ (79)
232. $h_b + h_a$, ϱ_c (80)
233. ϱ_a, ϱ_b (81)
234. r, p_a (82).

m) In den folgenden Aufgaben ist $\varrho_c : \varrho = m : n$ das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m-n}{m+n} = \frac{\sin{}^1/_2\gamma}{\cos{}^1/_2\delta}$. Die Aufgaben können auf die von f) und i) zurückgeführt werden, unter Berücksichtigung der Formeln $\frac{m-n}{m+n} = \frac{a-b}{p-q} = \frac{u-v}{a-b}$ und $\frac{m-n}{m+n} = \frac{c}{a+b}$. Außer $\varrho_c : \varrho = m : n$ ist noch gegeben:

235. a, b (201)
236. c, a — b (202)
237. h_c, a — b (67)
238. a — b, w_c (68)
239. r, u — v (58)
240. h_c, u — v (62)
241. $h_b - h_a$, u — v (64)
242. h_c, p — q (59)
243. h_c, t_c (60)
244. t_c, p — q (61)
245. $h_b - h_a$, p — q (63)
246. a + b, p — q (171)
247. p, q (172)
248. c, $h_b + h_a$ (137)
249. c, h_c (138)
250. h_c, a + b (139)
251. c, $\triangle$ (140)
252. a + b, $\triangle$ (141)
253. c, $h_b - h_a$ (142)
254. a + b, $h_b - h_a$ (143)
255. c, w_c (144)

256. $a + b$, w_c (145) 260. r, h_c (73) 263. h_c, ϱ_a (78)
257. c, ϱ_a (150) 261. r, $h_b + h_a$ (74) 264. ϱ_a, ϱ_b (81)
258. $a + b$, ϱ_a (151) 262. h_c, $h_b + h_a$ (77) 265. r, p_a (82).
259. r, w_c (55)

n) In den folgenden Aufgaben ist $\varrho_a : \varrho_b = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m+n}{m-n} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\delta}$. Die Aufgaben 270 bis 292 können auf die von g) und h) zurückgeführt werden mittelst der Formeln $\frac{m+n}{m-n} = \frac{c}{a-b}$ und $\frac{m+n}{m-n} = \frac{a+b}{p-q}$. Außer $\varrho_a : \varrho_b = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ ist noch gegeben:

266. a, b. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} = \frac{c}{a-b}$; also sind a, b, c, bekannt.
267. c, $a + b$. Aufl. wie 266.
268. $a - b$, $p - q$. Aufl. $\frac{m+n}{m-n} = \frac{c}{a-b} = \frac{a+b}{p-q}$; also sind a, b, c bekannt.
269. p, q. Aufl. wie 268.

270. h_c, $p - q$ (83) 278. r, $h_b - h_a$ (94) 286. r, p_c (104)
271. h_c, t_c (84) 279. h_c, $h_b - h_a$ (96) 287. c, h_c (105)
272. t_c, $p - q$ (85) 280. h_c, ϱ (97) 288. $a - b$, h_c (106)
273. $h_b + h_a$, $p - q$ (86) 281. h_c, ϱ_c (98) 289. c, $\triangle$ (107)
274. $a + b$, h_c (87) 282. ϱ, ϱ_c (100) 290. c, $h_b - h_a$ (109)
275. $a + b$, w_c (88) 283. h_c, $u - v$ (101) 291. c, $h_b + h_a$ (110)
276. $h_b - h_a$, $u - v$ (92) 284. r, w_c (102) 292. $a - b$, $h_b + h_a$ (111)
277. r, h_c (93) 285. r, ϱ (103)

o) In den folgenden Aufgaben ist $p : \mathbf{h}_c = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m}{n-m} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\delta}$. Die Aufgaben 297 bis 317 können auf die von f) und i) zurückgeführt werden mittelst der Formeln $\frac{m}{n-m} = \frac{c}{a+b} = \frac{a-b}{p-q}$. In den Aufgaben 293 bis 296 können durch eben diese Formeln leicht die drei Seiten des Dreiecks berechnet werden. Außer $\varrho : \mathbf{h}_c = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ ist noch gegeben:

293. a, b 300. $h_b - h_a$, $p - q$ (63) 307. $h_b + h_a$, ϱ_c (80)
294. c, $a - b$ 301. $h_b - h_a$, $u - v$ (64) 308. p_a, p_b (81)
295. $a + b$, $p - q$ 302. $p - q$, ϱ_c (66) 309. r, ϱ_a (82)
296. p, q 303. $a - b$, w_c (68) 310. c, $h_b + h_a$ (137)
297. r, w_c (55) 304. $a - b$, ϱ_c (70) 311. c, $h_b - h_a$ (142)
298. w_c, p_c (57) 305. r, $h_b + h_a$ (74) 312. $a + b$, $h_b - h_a$ (143)
299. r, $u - v$ (58) 306. r, ϱ_c (76) 313. c, w_c (144)

314. $a + b$, w_c (145)
315. c, ϱ_c (148)
316. $a + b$, ϱ_c (149)
317. $a + b$, ρ_a (151).

p) In den folgenden Aufgaben ist $\varrho_c : \mathbf{h}_c = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ das gegebene Verhältniß; es ist $\frac{m}{m + n} = \frac{\sin {}^1/_2 \gamma}{\cos {}^1/_2 \delta}$. Die Aufgaben sind ebenso zu lösen, wie die von o). Außer $\varrho_c : \mathbf{h}_c = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ ist noch gegeben:

318. a, b (293)
319. c, $a - b$ (294)
320. $a + b$, $p - q$ (295)
321. p, q (296)
322. r, w_c (55)
323. w_c, ϱ (56)
324. r, $u - v$ (58)
325. $h_b - h_a$, $p - q$ (63)
326. $h_b - h_a$, $u - v$ (64)
327. $p - q$, ϱ (65)
328. $a - b$, w_c (68)
329. $a - b$, ϱ (69)
330. r, $h_b + h_a$ (74)
331. r, ϱ (75)
332. $h_b + h_a$, ρ (79)
333. ϱ_a, ϱ_b (81)
334. r, ϱ_a (82)
335. c, $h_b + h_a$ (137)
336. c, $h_b - h_a$ (142)
337. $a + b$, $h_b - h_a$ (143)
338. c, w_c (144)
339. $a + b$, w_c (145)
340. c, ϱ (146)
341. $a + b$, ϱ (147)
342. $a + b$, ϱ_a (151).

q) In den folgenden Aufgaben ist $\mathbf{t}_a : \mathbf{t}_b = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ das gegebene Verhältniß; dieselben sind unter Berücksichtigung des §. 16, C, a) Gesagten auf a) zurückzuführen. Außer $\mathbf{t}_a : \mathbf{t}_b = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ ist noch gegeben:

343. c, h_c (1)
344. c, $\triangle$ (3)
345. h_c, $\triangle$ (4)
346. c, t_c (8)
347. t_c, $\triangle$ (16)
348. p, q (11)
349. $p - q$, h_c (13)
350. h_c, t_c (14)
351. $p - q$, t_c (15).

C. In den folgenden Aufgaben sind zwei Verhältnisse gegeben; durch dieselben sind stets die Winkel zu berechnen und zwar ganz in derselben Weise, wie die entsprechenden Aufgaben in B), in denen eins der beiden Verhältnisse gegeben und außerdem die beiden Elemente, welche das andere Verhältniß bilden. Sind z. B. die beiden Verhältnisse $a : b$ und $c : h_c$ gegeben, so ist diese Aufgabe auf 33) zurückzuführen, in welcher a, b, $c : h$ gegeben; denn aus $c : h_c$ erhält man eine Gleichung für γ und δ; eine zweite ergiebt sich, wie in der Vorbemerkung zu B) gesagt, durch Division von a und b, also auch durch ihr Verhältniß. Außerdem muß nun noch ein Element gegeben sein, so daß schließlich die Aufgaben auf die von §. 14, A) und §. 15, A) zurückgeführt werden, und wenn t_c gegeben, auf §. 16, 1.

a) In den folgenden Aufgaben sind $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\mathbf{c} : \mathbf{h}_c = \mathbf{m}' : \mathbf{n}'$ die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (1) zu berechnen. Außerdem ist noch gegeben:

352. r
353. h_a
354. $h_b + h_a$
355. $h_b - h_a$
356. p
357. $p - q$
358. u
359. $u - v$
360. w_c
361. t_c
362. $\triangle$
363. ϱ
364. ϱ_c.

b) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\mathbf{c} : \mathbf{w_c} = \mathbf{m'} : \mathbf{n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (6) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

365. r	368. $h_b - h_a$	371. u	374. $\triangle$
366. h_c	369. p	372. $u - v$	375. ϱ
367. $h_b + h_a$	370. $p - q$	373. t_c	376. ϱ_c.

c) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\mathbf{c} : \mathbf{t_c} = \mathbf{m'} : \mathbf{n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (8) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

377. r	380. $h_b - h_a$	383. u	386. $\triangle$
378. h_c	381. p	384. $u - v$	387. ϱ
379. $h_b + h_a$	382. $p - q$	385. w_c	388. ϱ_c.

d) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\mathbf{p} : \mathbf{q} = \mathbf{m'} : \mathbf{n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (11) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

389. r	393. $h_b + h_a$	396. $u - v$	399. $\triangle$
390. s	394. $h_b - h_a$	397. w_c	400. ρ
391. $s - c$	395. u	398. t_c	401. ρ_c.
392. h_c			

e) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\varrho : \mathbf{h_c} = \mathbf{m'} : \mathbf{n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (18) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

402. r	406. $h_b + h_a$	410. u	413. t_c
403. c	407. $h_b - h_a$	411. $u - v$	414. $\triangle$
404. s	408. p	412. w_c	415. ϱ_c.
405. $s - c$	409. $p - q$		

f) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\varrho_c : \mathbf{h_c} = \mathbf{m'} : \mathbf{n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (19) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

416. r	420. $h_b + h_a$	424. u	427. t_c
417. c	421. $h_b - h_a$	425. $u - v$	428. $\triangle$
418. s	422. p	426. w_c	429. ϱ.
419. $s - c$	423. $p - q$		

g) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\varrho : \varrho_c = \mathbf{m'} : \mathbf{n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (20) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

430. r	434. h_c	438. $p - q$	442. t_c
431. c	435. $h_b + h_a$	439. u	443. $\triangle$
432. s	436. $h_b - h_a$	440. $u - v$	444. ϱ_a.
433. $s - c$	437. p	441. w_c	

h) $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{m} : \mathbf{n}$ und $\varrho_a : \varrho_b = \mathbf{m'} : \mathbf{n'}$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (21) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

445. r	449. h_c	453. $p - q$	457. t_c
446. c	450. $h_b + h_a$	454. u	458. $\triangle$
447. s	451. $h_b - h_a$	455. $u - v$	459. ϱ
448. $s - c$	452. p	456. w_c	460. ϱ_c.

i) $p : q = m : n$ und $\varrho : h_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (27) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

461. r	465. $s - c$	468. u	471. t_c
462. $a + b$	466. $h_b + h_a$	469. $u - v$	472. $\triangle$
463. $a - b$	467. $h_b - h_a$	470. w_c	473. ϱ_c.
464. s			

k) $p : q = m : n$ und $\varrho_c : h_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (28) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

474. r	478. $s - c$	481. u	484. t_c
475. $a + b$	479. $h_b + h_a$	482. $u - v$	485. $\triangle$
476. $a - b$	480. $h_b - h_a$	483. w_c	486. ϱ.
477. s			

l) $p : q = m : n$ und $\varrho : \varrho_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (29) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

487. r	491. $s - c$	495. u	498. t_c
488. $a + b$	492. h_c	496. $u - v$	499. $\triangle$
489. $a - b$	493. $h_b + h_a$	497. w_c	500. ϱ_a.
490. s	494. $h_b - h_a$		

m) $p : p = m : n$ und $\varrho_a : \varrho_b = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (30) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

501. r	505. $s - c$	509. u	513. $\triangle$
502. $a + b$	506. h_c	510. $u - v$	514. ϱ
503. $a - b$	507. $h_b + h_a$	511. w_c	515. ϱ_c.
504. s	508. $h_b - h_a$	512. t_c	

n) $c : h_c = m : n$ und $\varrho : \varrho_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (37) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

516. r	520. $s - c$	524. $p - q$	528. t_c
517. $a + b$	521. $h_b + h_a$	525. u	529. $\triangle$
518. $a - b$	522. $h_b - h_a$	526. $u - v$	530. ϱ_a.
519. s	523. p	527. w_c	

o) $c : h_c = m : n$ und $\varrho_a : \varrho_b = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (38) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

531. r	535. $s - c$	539. $p - q$	543. t_c
532. $a + b$	536. $h_b + h_a$	540. u	544. $\triangle$
533. $a - b$	537. $h_b - h_a$	541. $u - v$	545. ϱ
534. s	538. p	542. w_c	546. ϱ_c.

p) $c : a + b = m : n$ und $r : \varrho = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (75) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

547. $a - b$	549. $s - c$	551. $h_b + h_a$	553. p
548. s	550. h_c	552. $h_b - h_a$	554. $p - q$

555. u	557. w_c	559. $\triangle$	560. ϱ_c.
556. u — v	558. t_c		

q) $c : a + b = m : n$ und $r : \varrho_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (76) zu berechnen; außerdem ist noch gegeben:

561. a — b	565. $h_b + h_a$	569. u	572. t_c
562. s	566. $h_b - h_a$	570. u — v	573. $\triangle$
563. s — c	567. p	571. w_c	574. ϱ.
564. h_c	568. p — q		

r) $c : a + b = m : n$ und $\varrho_a : \varrho_b = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (81) zu berechnen; außerdem ist noch gegeben:

575. a — b	579. $h_b + h_a$	583. u	587. $\triangle$
576. s	580. $h_b - h_a$	584. u — v	588. ϱ
577. s — c	581. p	585. w_c	589. ϱ_c.
578. h_c	582. p — q	586. t_c	

s) $c : a - b = m : n$ und $h_c : \varrho = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (97) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

590. r	594. $h_b + h_a$	598. u	601. t_c
591. a + b	595. $h_b - h_a$	599. u — v	602. $\triangle$
592. s	596. p	600. w_c	603. ϱ_c.
593. s — c	597. p — q		

t) $c : a - b = m : n$ und $h_c : \varrho_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (98) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

604. r	608. $h_b + h_a$	612. u	615. t_c
605. a + b	609. $h_b - h_a$	613. u — v	616. $\triangle$
606. s	610. p	614. w_c	617. ϱ.
607. s — c	611. p — q		

u) $c : a - b = m : n$ und $\varrho : \varrho_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (100) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

618. r	622. h_c	626. p — q	630. t_c
619. a + b	623. $h_b + h_a$	627. u	631. $\triangle$
620. s	624. $h_b - h_a$	628. u — v	632. ϱ_a.
621. s — c	625. p	629. w_c	

v) $c : a - b = m : n$ und $r : \varrho = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (103) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

633. a + b	637. $h_b + h_a$	641. u	644. t_c
634. s	638. $h_b - h_a$	642. u — v	645. $\triangle$
635. s — c	639. p	643. w_c	646. ϱ_c.
636. h_c	640. p — q		

w) $c : a - b = m : n$ und $r : \varrho_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (104) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

647. a + b	648. s	649. s — c	650. h_c

651. $h_b + h_a$	654. $p - q$	657. w_c	659. $\triangle$
652. $h_b - h_a$	655. u	658. t_c	660. ϱ.
653. p	656. $u - v$		

x) $\varrho_c : \varrho = m : n$ und $\varrho_a : \varrho_b = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (264) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

661. r	665. s	669. $h_b - h_a$	673. $u - v$
662. c	666. $s - c$	670. p	674. w_c
663. $a + b$	667. h_c	671. $p - q$	675. t_c
664. $a - b$	668. $h_b + h_a$	672. u	676. $\triangle$.

y) $\varrho_a : \varrho_b = m : n$ und $h_c : \varrho = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (280) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

677. r	681. s	685. p	689. w_c
678. c	682. $s - c$	686. $p - q$	690. t_c
679. $a + b$	683. $h_b + h_a$	687. u	691. $\triangle$
680. $a - b$	684. $h_b - h_a$	688. $u - v$	692. ϱ_c.

z) $\varrho_a : \varrho_b = m : n$ und $h_c : \varrho_c = m' : n'$ sind die gegebenen Verhältnisse; die Winkel sind nach (281) zu berechnen; außerdem ist gegeben:

693. r	697. s	701. p	705. w_c
694. c	698. $s - c$	702. $p - q$	706. t_c
695. $a + b$	699. $h_b + h_a$	703. u	707. $\triangle$
696. $a - b$	700. $h_b - h_a$	704. $u - v$	708. ϱ.

§. 18.

Aufgaben, in denen eine Relation zwischen den Winkeln besteht.

In den Aufgaben dieses Paragraphen soll entweder $\alpha = 2\beta$, oder $\alpha = 3\beta$, oder $\alpha = 4\beta$ sein, und außerdem müssen noch zwei Stücke des Dreiecks gegeben sein. Bei verschiedenen Aufgaben finden die Formeln $\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin\alpha^3$, $\sin 4\alpha = (4 \sin\alpha - 8 \sin\alpha^3) \cos\alpha$, $\sin 5\alpha = 5 \sin\alpha - 20 \sin\alpha^3 + 16 \sin\alpha^5$, $\cos 3\alpha = 4 \cos\alpha^3 - 3 \cos\alpha$, $\cos 4\alpha = 8 \cos\alpha^4 - 8 \cos\alpha^2 + 1$, $\cos 5\alpha = 16 \cos\alpha^5 - 20 \cos\alpha^3 + 5 \cos\alpha$ Anwendung.

a) Es sei $\alpha = 2\beta$. Die Aufgaben 1 bis 26 sind den §§. 14 und 15, C entnommen. Dort waren immer je zwei Dreiecksstücke aufgestellt, durch welche man sofort einen Winkel, d. h. γ oder δ berechnen kann; nimmt man die hier aufgestellte Bedingung hinzu, so findet man sofort eine Function von β und kann so α berechnen. Außer der Bedingung $\alpha = 2\beta$ ist nun gegeben:

1. a, h_c. Aufl. $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$.

2. p, h_c. Aufl. $\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{p}$.

3. a, p. Aufl. $\cos\beta = \frac{p}{a}$.

4. c, r. Aufl. $\sin 3\beta = \frac{c}{2r}$.

5. p — q, r. Aufl. $\sin\beta = \frac{p-q}{2r}$.

6. h_c, w_c. Aufl. $\cos {}^1/_2\beta = \frac{h_c}{w_c}$.

7. a + b, $h_b + h_a$. Aufl. $\sin 3\beta = \frac{h_b + h_a}{a+b}$.

8. a — b, $h_b - h_a$. Aufl. $\sin 3\beta = \frac{h_b - h_a}{a-b}$.

9. $\triangle$, $a^2+b^2-c^2$. Aufl. $\cot(\pi - 3\beta) = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\triangle}$.

10. $\triangle$, ab. Aufl. $\sin 3\beta = \frac{2\triangle}{ab}$.

11. $a^2+b^2-c^2$, ab. Aufl. $\cos(\pi - 3\beta) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

12. ϱ_c, s. Aufl. $\cot {}^3/_2\beta = \frac{\varrho_c}{s}$.

13. ϱ, s — c. Aufl. $\cot {}^3/_2\beta = \frac{\varrho}{s-c}$.

14. ϱ_a, s — c. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\beta = \frac{s-c}{\varrho_a}$.

15. c, $\varrho_c - \varrho$. Aufl. $\cot {}^3/_2\beta = \frac{\varrho_c - \varrho}{c}$.

16. r, $\varrho_c - \varrho$. Aufl. $\cos {}^3/_2\beta = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\varrho_c - \varrho}{r}}$.

17. c, $\varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $\cot {}^3/_2\beta = \frac{c}{\varrho_a + \varrho_b}$.

18. r, $\varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $\sin {}^3/_2\beta = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\varrho_a + \varrho_b}{r}}$.

19. $\varrho_c - \varrho$, $\varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $\cot {}^3/_2\beta = \sqrt{\frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_a + \varrho_b}}$.

20. a + b, $\varrho_c + \varrho$. Aufl. $\cot {}^3/_2\beta = \frac{\varrho_c + \varrho}{a+b}$.

21. a — b, $\varrho_a - \varrho_b$. Aufl. $\cot {}^3/_2\beta = \frac{a-b}{\varrho_a - \varrho_b}$.

22. $a + b$, $\varrho_a - \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{\varrho_a - \varrho_b}{a + b}$.

23. $a - b$, $\varrho_c + \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{a - b}{\varrho_c + \varrho}$.

24. $h_b + h_a$, $\varrho_c + \varrho$. Aufl. $\sin \frac{3}{2}\beta = \sqrt{\frac{h_b + h_a}{2(\varrho_c + \varrho)}}$.

25. $h_b - h_a$, $\varrho_a - \varrho_b$. Aufl. $\cos \frac{3}{2}\beta = \sqrt{\frac{h_b - h_a}{2(\rho_a - \rho_b)}}$.

26. $u - v$, $\varrho_c - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{u - v}{\varrho_c - \varrho}$.

27. a, b. Aufl. $\cos\beta = \frac{a}{2b}$.

28. h_a, h_b. Aufl. $\cos\beta = \frac{h_b}{2h_a}$.

29. u, v. Aufl. $\cos\beta = \frac{u}{2v}$.

30. p, q. 1. Aufl. $\frac{p}{q} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg} 2\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}\beta^2}$; $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{p - 2q}{p}}$. 2. Aufl. $\cos\beta = \frac{q}{p - q}$.

31. h_c, $p - q$. Aufl. $\sin\alpha = \frac{h_c}{p - q}$.

32. c, $a + b$. Aufl. $\frac{c}{a + b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \frac{3}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\beta} = \frac{4\cos \frac{1}{2}\beta^3 - 3\cos \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\beta} = 2 + 2\cos\beta - 3$; $\cos\beta = \frac{a + b + c}{2(a + b)}$.

33. c, $a - b$. Aufl. $\cos\beta = \frac{c - (a - b)}{2(a - b)}$ ähnlich wie 32.

34. $a + b$, $p - q$. Aufl. $\cos\beta = \frac{(a + b) - (p - q)}{2(p - q)}$ ähnlich wie 32.

35. $a - b$, $p - q$. Aufl. $\cos\beta = \frac{(a - b) + (p - q)}{2(p - q)}$ ähnlich wie 32.

36. $a - b$, $u - v$. Aufl. $\cos\beta = \frac{(a - b) + (u - v)}{2(a - b)}$.

37. $u - v$, $p - q$. Aufl. $\cos\beta = \frac{\sqrt{u - v} + \sqrt{p - q}}{2\sqrt{p - q}}$.

38. ϱ, h_c. Aufl. $\cos\beta = \frac{h_c}{2(h_c - \varrho)}$.

39. ρ_c, h_c. Aufl. $\cos\beta = \frac{h_c + 2\varrho_c}{2(h_c + \varrho_c)}$.

40. ϱ, ϱ_c. Aufl. $\cos\beta = \frac{\varrho_c}{\varrho_c + \varrho}$.

41. ϱ_a, ϱ_b. Aufl. $\cos\beta = \frac{\varrho_b}{\rho_a - \rho_b}$.

42. c, h_c. Aufl. $\frac{c}{h_c} = \frac{\sin 3\beta}{2 \sin\beta^2 \cos\beta} = \frac{1 + 2\cos 2\beta}{\sin 2\beta}$; also $c \sin\alpha - 2 h_c \cos\alpha = h_c$ (§. 3, 1).

b) $\alpha = 3\beta$. Die Aufgaben 1 bis 26 können auch unter dieser und jeder ähnlichen Bedingung, welche zwischen den Winkeln α und β stattfindet, gelöst werden; da jedoch die Lösungen von denen der vorhergehenden Aufgaben nicht wesentlich verschieden, so sind die Aufgaben an dieser Stelle nicht wieder aufgeführt. Unter der Bedingung, daß $\alpha = 3\beta$, ist gegeben:

43. a, b. Aufl. $\frac{a}{b} = \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = 3 - 4\sin\beta^2 = 1 + 2\cos 2\beta$; also $\cos 2\beta = \frac{a - b}{2b}$.

44. h_a, h_b. Aufl. $\cos 2\beta = \frac{h_b - h_a}{2 h_a}$.

45. u, v. Aufl. $\cos 2\beta = \frac{u - v}{2v}$.

46. p, q. Aufl. $\frac{p+q}{p-q} = \frac{\sin 4\beta}{\sin 2\beta} = 2\cos 2\beta$; also $\cos 2\beta = \frac{p+q}{2(p-q)}$.

47. ϱ_a, ϱ_b. Aufl. $\frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_a - \varrho_b} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = 2\cos\beta$; also $\cos\beta = \frac{\varrho_a + \varrho_b}{2(\rho_a - \rho_b)}$.

48. c, a — b. Aufl. $\cos\beta = \frac{c}{2(a-b)}$.

49. a + b, p — q. Aufl. $\cos\beta = \frac{a+b}{2(p-q)}$.

50. c, a + b. Aufl. $\frac{c}{a+b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{\cos 2\beta}{\cos\beta} = \frac{2\cos\beta^2 - 1}{\cos\beta}$; also $\cos\beta^2 - \frac{c}{2(a+b)} \cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

51. a — b, p — q. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{a-b}{2(p-q)} \cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

52. a — b, u — v. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{u-v}{2(a-b)} \cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

53. u — v, p — q. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u-v}{p-q}} \cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

54. ϱ_c, ϱ. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\varrho_c - \varrho}{2(\varrho_c + \varrho)} \cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

55. ϱ, h_c. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\varrho}{2(h_c - \varrho)} \cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

56. ϱ_c, h_c. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\varrho_c}{2(\varrho_c + h_c)} \cos\beta - \frac{1}{2} = 0$.

c) In den folgenden Aufgaben, die sämmtlich auf quadratische Gleichungen führen, ist außer der Bedingung $\alpha = 4\beta$ noch gegeben:

57. p, q. 1. Aufl. $\frac{p+q}{p-q} = \frac{\sin 5\beta}{\sin 3\beta} = \frac{5 - 20\sin\beta^2 + 16\sin\beta^4}{3 - 4\sin\beta^2}$; also $\sin\beta^4 - \frac{2p - 3q}{2(p-q)} \sin\beta^2 + \frac{p - 4q}{8(p-q)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{q}{p-q} \cos\beta - \frac{p}{2(p-q)} = 0$.

58. c, a + b. 1. Aufl. $\frac{c}{a+b} = \frac{\cos{}^5/_2\beta}{\cos{}^3/_2\beta} = \frac{16\cos{}^1/_2\beta^4 - 20\cos{}^1/_2\beta^2 + 5}{4\cos{}^1/_2\beta^2 - 3}$, also $\cos{}^1/_2\beta^4 - \frac{5(a+b)+c}{4(a+b)} \cos{}^1/_2\beta^2 + \frac{5(a+b)+3c}{16(a+b)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{a+b+c}{2(a+b)} \cos\beta - \frac{a+b-c}{4(a+b)} = 0$.

59. c, a — b. 1. Aufl. $\sin{}^1/_2\beta^4 - \frac{5(a-b)-c}{4(a-b)} \sin{}^1/_2\beta^2 - \frac{3c - 5(a-b)}{16(a-b)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{c-(a-b)}{2(a-b)} \cos\beta - \frac{a-b+c}{4(a-b)} = 0$.

60. a + b, p — q. 1. Aufl. $\sin{}^1/_2\beta^4 + \frac{(a+b) - 5(p-q)}{4(p-q)} \sin{}^1/_2\beta^2 - \frac{3(a+b) - 5(p-q)}{16(p-q)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{a+b-(p-q)}{2(p-q)} \cos\beta - \frac{p-q+a+b}{4(p-q)} = 0$.

61. a — b, p — q. 1. Aufl. $\cos{}^1/_2\beta^4 - \frac{5(p-q)+(a-b)}{4(p-q)} \cos{}^1/_2\beta^2 + \frac{5(p-q)+3(a-b)}{16(p-q)} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{p-q+a-b}{2(p-q)} \cos\beta - \frac{p-q-(a-b)}{4(p-q)} = 0$.

62. a — b, u — v. 1. Aufl. $\cos{}^1/_2\beta^4 - \frac{5(a-b)+(u-v)}{4(a-b)}$

$\cos {}^1/_2\beta^2 + \frac{5(a-b)+3(u-v)}{16(a-b)} = 0.$ 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{a-b+u-v}{2(a-b)}\cos\beta - \frac{a-b-(u-v)}{4(a-b)} = 0.$

63. $u-v$, $p-q$. 1. Aufl. $\cos {}^1/_2\beta^4 - \frac{5\sqrt{p-q}+\sqrt{u-v}}{4\sqrt{p-q}}$ $\cos {}^1/_2\beta^2 + \frac{5\sqrt{p-q}+3\sqrt{u-v}}{16\sqrt{p-q}} = 0.$ 2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\sqrt{p-q}+\sqrt{u-v}}{2\sqrt{p-q}}\cos\beta - \frac{\sqrt{p-q}-\sqrt{u-v}}{4\sqrt{p-q}} = 0.$

64. ϱ, ϱ_c. 1. Aufl. $\cos {}^1/_2\beta^4 - \frac{3\varrho_c+2\rho}{2(\varrho_c+\varrho)}\cos {}^1/_2\beta^2 + \frac{4\varrho_c+\rho}{8(\varrho_c+\varrho)} = 0.$

2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\varrho_c}{\varrho_c+\varrho}\cos\beta - \frac{\varrho}{2(\varrho_c+\varrho)} = 0.$

65. ϱ_a, ϱ_b. 1. Aufl. $\sin {}^1/_2\beta^4 - \frac{2\varrho_a-3\varrho_b}{2(\varrho_a-\varrho_b)}\sin {}^1/_2\beta^2 + \frac{\varrho_a-4\varrho_b}{8(\varrho_a-\rho_b)} = 0.$

2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{\varrho_b}{\varrho_a-\varrho_b}\cos\beta - \frac{\varrho_a}{2(\varrho_a-\varrho_b)} = 0.$

66. ρ, h_c. 1. Aufl. $\cos {}^1/_2\beta^4 - \frac{5h_c-4\rho}{4(h_c-\varrho)}\cos {}^1/_2\beta^2 + \frac{5h_c-2\varrho}{16(h_c-\rho)} = 0.$

2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{h_c}{2(h_c-\varrho)}\cos\beta - \frac{h_c-2\varrho}{4(h_c-\varrho)} = 0.$

67. ϱ_c, h_c. 1. Aufl. $\cos {}^1/_2\beta^4 - \frac{5h_c+6\varrho_c}{4(h_c+\varrho_c)}\cos {}^1/_2\beta^2 + \frac{5h_c+8\rho_c}{16(h_c+\varrho_c)} = 0.$

2. Aufl. $\cos\beta^2 - \frac{h_c+2\varrho_c}{2(h_c+\varrho_c)}\cos\beta - \frac{h_c}{4(h_c+\varrho_c)} = 0.$

§. 19.

Auflösung der cubischen Gleichungen nebst Aufgaben.

Es sei $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ die gegebene cubische Gleichung; dieselbe ist zunächst in eine andere zu verwandeln, in welcher das zweite Glied fehlt; dies geschieht mittelst der Substitution $x = y - {}^1/_3 a$ und man erhalte so die reducirte cubische Gleichung: $y^3 + py - q = 0$. Wir setzen nun $y = u + v$, wo eine der beiden neuen Unbekannten eine ganz unabhängig Veränderliche ist. Wir erhalten $(u+v)^3 + p(u+v) - q = 0$ oder $u^3 + v^2 + (u+v)(3uv+p) - q = 0$. Die eine der Unbekannten u oder v nehmen wir nun so an, daß $3uv + p = 0$; dann ist $u^3 + v^3 = q$ und $uv = -\frac{p}{3}$ oder $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$.

Man kann nun u^3 und v^3 als Wurzeln einer quadratischen Gleichung ansehen und findet $u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ und $v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$; mithin $y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ (Cardanische Formel). Die beiden anderen Wurzeln der Gleichung findet man auf folgende Weise: Durch Subtraction der beiden Gleichungen $y^3 + py - q = 0$ und $(u + v)^3 + p\,(u + v) - q = 0$ erhält man: $y^3 - (u + v)^3 + p\,(y - (u + v)) = 0$ oder $(y - (u + v))\,\{y^2 + y\,(u + v) + (u + v)^2 + p\} = 0$. Nun ist entweder $y - (u + v) = 0$, welcher Werth bereits in der Cardanischen Formel gefunden, oder es ist $y^2 + y\,(u + v) + (u + v)^2 + p = 0$, also $y = -\frac{u + v}{2} \pm \sqrt{-\frac{3\,(u + v)^2}{4} - p} = \frac{1}{2}\,\{-(u + v) \pm \sqrt{-3\,(u + v)^2 + 12\,uv}\} = -\frac{u + v}{2} \pm \frac{u - v}{2}\,i\sqrt{3}$. Die Cardanische Formel wird nur dann zu benutzen sein, wenn die Größe unter dem Quadratwurzelzeichen positiv ist. Da unter der Voraussetzung, daß p und q reelle Größen sind, $\frac{q^2}{4}$ stets positiv ist, so hängt dies hauptsächlich von der Größe und dem Vorzeichen von p ab.

1. $p > 0$; die Gleichung hat also die Form $y^3 + py - q = 0$. Sind p und q irrationale Zahlen, so empfiehlt sich mehr die trigonometrische Auflösung. Nach der Cardanischen Formel ist $y =$

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\,p^3}{27\,q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\,p^3}{27\,q^2}}\right)};$$ hierin $\frac{4\,p^3}{27\,q^2} = \operatorname{tg}\varphi^2$ (1, a), also $\frac{q}{2} = \cot\varphi\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ gesetzt, giebt

$$y = \sqrt[3]{\cot\varphi\sqrt{\frac{p^3}{27}}\left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi^2}\right)} + \sqrt[3]{\cot\varphi\sqrt{\frac{p^3}{27}}\left(1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\sqrt[3]{\cot\varphi\left(1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right)} + \sqrt[3]{\cot\varphi\left(1 - \frac{1}{\cos\varphi}\right)}\right\} =$$

$\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\cot {}^1\!/_2\,\varphi} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varphi}\right)$, und nun $\sqrt[3]{\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varphi} = \operatorname{tg}\psi$ (1, b) gesetzt, giebt $y = \sqrt{\frac{p}{3}}\,(\cot\psi - \operatorname{tg}\psi) = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\psi$ (1, c).

2. $p < 0$ und $\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}$, so daß die Cardanische Formel noch anzuwenden ist. Die Gleichung hat die Form $y^3 - py - q = 0$. Es ist

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right]} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right]};$$

hierin $\frac{4p^3}{27q^2} = \sin\varphi^2$ (2, a) gesetzt, also $\frac{q}{2} = \sqrt{\frac{p^3}{27}}\,\frac{1}{\sin\varphi}$, giebt

$$y = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}}\frac{1}{\sin\varphi}\left(1 + \sqrt{1 - \sin\varphi^2}\right)} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}}\frac{1}{\sin\varphi}\left(1 - \sqrt{1 - \sin\varphi^2}\right)}$$

$= \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\cot {}^1\!/_2\,\varphi} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varphi}\right)$; $\sqrt[3]{\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varphi} = \operatorname{tg}\psi$ (2, b) gesetzt,

giebt $y = \sqrt{\frac{p}{3}}\,(\operatorname{tg}\psi + \cot\psi) = \frac{2}{\sin 2\psi}\sqrt{\frac{p}{3}}$ (2, c).

3. Irreductibler Fall, wenn $p < 0$ und $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$; die Gleichung hat drei reelle Wurzeln und die Form: $y^2 - py - q = 0$; in diesem Fall ist die Cardanische Formel nicht anwendbar. Wenn in der Formel $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha$, $\frac{\alpha}{3}$ für α gesetzt wird, so erhält man: $\cos {}^1\!/_3\alpha^3 - {}^3\!/_4 \cos {}^1\!/_3\alpha - {}^1\!/_4\cos\alpha = 0$, die Gleichung mit r^3 multiplicirt, giebt $(r\cos {}^1\!/_3\alpha)^3 - {}^3\!/_4\, r^2\,(r\cos {}^1\!/_3\alpha) - {}^1\!/_4\, r^3\cos\alpha = 0$ (G). Diese Gleichung wird mit der gegebenen identisch, also $y = r\cos {}^1\!/_3\,\alpha$ sein, wenn $p = {}^3\!/_4\, r^2$ und $q = {}^1\!/_4\, r^3 \cos\alpha$ ist; mithin $r = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$ (3, a) und $\cos\alpha = \sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}$ (3, b). Der Gleichung (G) genügen aber auch die Werthe $-\,r\cos {}^1\!/_3(\pi - \alpha)$ und $-\,r\cos {}^1\!/_3(\pi + \alpha)$, denn es ist $(-\,r\cos {}^1\!/_3(\pi - \alpha))^3 - {}^3\!/_4\, r^2\,(-\,r\cos {}^1\!/_3(\pi - \alpha)) - {}^1\!/_4\, r^3\cos\alpha = 0$ und $(-\,r\cos {}^1\!/_3(\pi + \alpha))^3 - {}^3\!/_4\, r^2\,(-\,r\cos {}^1\!/_3(\pi + \alpha)) - {}^1\!/_4\, r^3\cos\alpha = 0$. Für y erhält man also folgende drei Werthe: $y_1 = r\cos {}^1\!/_3\alpha$; $y_2 = -\,r\cos {}^1\!/_3(\pi - \alpha)$; $y_3 = -\,r\cos {}^1\!/_3(\pi + \alpha)$, wo r und α aus (3, a) und (3, b) zu berechnen sind.

Die Auflösungs-Methode der hierher gehörenden Aufgaben ist ebenso wie die der entsprechenden Aufgaben, welche nicht auf cubische Gleichungen

führen; daher bei den verschiedenen Gruppen auf die Paragraphen verwiesen ist, in denen der Weg zur Auflösung angegeben. Diejenigen Aufgaben, welche auf reducirte cubische Gleichungen führen, sind besonders hervorgehoben.

a) Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck; 1 und 2 liefern reducirte cubische Gleichungen.

1. $c + b$, $\triangle$. Aufl. $a^3 - (c + b)^2 a + 4 (c + b) \triangle = 0.$
2. $c - b$, $\triangle$. Aufl. $a^3 - (c - b)^2 a - 4 (c - b) \triangle = 0.$
3. $c + b$, h. Aufl. $a^3 + h a^2 - (c + b)^2 a + h (c + b)^2 = 0.$
4. $c - b$, h. Aufl. $a^3 - h a^2 - (c - b)^2 a - h (c - b)^2 = 0.$

b) Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck; 5 bis 20 führen auf reducirte cubische Gleichungen. Die zur Auflösung führenden Wege sind §. 13 angegeben.

5. $a + h_b$, $b - h_a$. Aufl. $\cot {}^1/_2\beta^3 + \cot {}^1/_2\beta - \frac{4(a + h_b)}{b - h_a} = 0.$
6. $a - h_b$, $b + h_a$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\beta^3 + \operatorname{tg} {}^1/_2\beta - \frac{4(a - h_b)}{b + h_a} = 0.$
7. $a + h_b$, $\triangle$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\beta^3 - \operatorname{tg} {}^1/_2\beta + \frac{2\triangle}{(a + h_b)^2} = 0.$
8. $a - h_b$, $\triangle$. Aufl. $\cot {}^1/_2\beta^3 - \cot {}^1/_2\beta - \frac{2\triangle}{(a - h_b)^2} = 0.$
9. ϱ, $\triangle$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha^3 - \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha + \frac{2\varrho^2}{\triangle} = 0.$
10. $2a + b$, ϱ. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha^3 - \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha + \frac{4\varrho}{2a + b} = 0.$
11. $2a - b$, ϱ_b. Aufl. $\cot {}^1/_2\alpha^3 - \cot {}^1/_2\alpha - \frac{4\varrho_b}{2a - b} = 0.$
12. $2a + b$, $h_b - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha^3 + \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha - \frac{4(h_b - \varrho)}{2a + b} = 0.$
13. $2a - b$, $h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cot {}^1/_2\alpha^3 + \cot {}^1/_2\alpha - \frac{4(h_b + \varrho_b)}{2a - b} = 0.$
14. ϱ_b, $\triangle$. Aufl. $\cot {}^1/_2\alpha^3 - \cot {}^1/_2\alpha - \frac{2\varrho_b^2}{\triangle} = 0.$
15. $\varrho_b + \varrho$. Aufl. $\cot\alpha^3 + \cot\alpha - \frac{(\varrho_b + \varrho)^2}{4\triangle} = 0.$
16. q, $\triangle$. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha^3 + \operatorname{tg}\alpha - \frac{4\triangle}{q^2} = 0.$
17. w_a, u. Aufl. $\cos {}^1/_2\alpha^3 - {}^1/_2 \cos\alpha - \frac{w_a}{8u} = 0.$
18. r, h_a. Aufl. $\sin\beta^3 - \sin\beta + \frac{h_a}{4r} = 0.$

19. r, p. Aufl. $\cos\beta^3 - \frac{1}{4}\cos\beta - \frac{p}{4r} = 0.$

20. r, q. Aufl. $\sin\alpha^3 - \sin\alpha + \frac{q}{4r} = 0.$

21. q, u. Aufl. $\frac{1}{\cos\alpha^3} - \frac{2u}{q}\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{4u}{q} = 0.$

22. h_a, a + h_b. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\beta^3 - \frac{2(a+h_b)}{h_a}\cot\frac{1}{2}\beta^2 + \cot\frac{1}{2}\beta + \frac{2(a+h_b)}{h_a} = 0.$

23. h_a, a — h_b. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{2(a-h_b)}{h_a}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta^2 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta - \frac{2(a-h_b)}{h_a} = 0.$

24. b, $h_b - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{2(h_b-\varrho)}{b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha - \frac{2(h_b-\varrho)}{b} = 0.$

25. b, $h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{2(h_b+\varrho_b)}{b}\cot\frac{1}{2}\alpha^2 + \cot\frac{1}{2}\alpha + \frac{2(h_b+\varrho_b)}{b} = 0.$

26. a, ϱ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{\varrho}{a}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{\varrho}{a} = 0.$

27. a, ϱ_b. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{\varrho_b}{a}\cot\frac{1}{2}\alpha^2 - \cot\frac{1}{2}\alpha - \frac{\varrho_b}{a} = 0.$

28. a, w_a. Aufl. $\cos\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{w_a}{2a}\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\alpha + \frac{w_a}{8a} = 0.$

29. h_b, w_a. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{h_b}{w_a}\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{4}\sin\frac{1}{2}\alpha + \frac{h_b}{2w_a} = 0.$

30. a + b, ϱ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{\varrho}{a+b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{3\varrho}{a+b} = 0.$

31. a — b, ϱ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{3\varrho}{a-b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha - \frac{\varrho}{a-b} = 0.$

32. a + b, ϱ_b. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{3\varrho_b}{a+b}\cot\frac{1}{2}\alpha^2 - \cot\frac{1}{2}\alpha + \frac{\varrho_b}{a+b} = 0.$

33. $a - b, \varrho_b$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{\varrho_b}{a - b} \cot \frac{1}{2}\alpha^2 - \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{3\varrho_b}{a - b} = 0$.

34. $a + b, h_b - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{h_b - \varrho}{a + b} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^2 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha - \frac{3(h_b - \varrho)}{a + b} = 0$.

35. $a - b, h_b - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{3(h_b - \varrho)}{a - b} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^2 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + \frac{h_b - \varrho}{a - b} = 0$.

36. $a + b, h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{3(h_b + \varrho_b)}{a + b} \cot \frac{1}{2}\alpha^2 + \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{h_b + \varrho_b}{a + b} = 0$.

37. $a - b, h_b + \varrho_b$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{h_b + \varrho_b}{a - b} \cot \frac{1}{2}\alpha^2 + \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{3(h_b + \varrho_b)}{a - b} = 0$.

38. $h_b - h_a, v$. Aufl. $\operatorname{tg} \alpha^3 - \frac{2(h_b - h_a)}{v} \operatorname{tg} \alpha^2 - 3 \operatorname{tg} \alpha - \frac{2(h_b - h_a)}{v} = 0$.

39. $a + h_b, \varrho_b + \varrho$. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\beta^3 - \frac{2(a + h_b)}{\varrho_b + \varrho} \cot \frac{1}{2}\beta^2 - \cot \frac{1}{2}\beta - \frac{2(a + h_b)}{\varrho_b + \varrho} = 0$.

40. $a - h_b, \varrho_b + \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta^3 + \frac{2(a - h_b)}{\varrho_b + \varrho} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta^2 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta + \frac{2(a - h_b)}{\varrho_b + \varrho} = 0$.

41. $2a + b, w_a$. Aufl. $\cos \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{2a + b}{2w_a} \cos \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}\cos \frac{1}{2}\alpha + \frac{2a + b}{4w_a} = 0$.

42. ϱ, w_a. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{\varrho}{w_a} \sin \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{4}\sin \frac{1}{2}\alpha + \frac{\varrho}{w_a} = 0$.

43. q, ϱ. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{q}{2\varrho} \cot \frac{1}{2}\alpha^2 - \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{q}{2\varrho} = 0$.

44. q, ϱ_b. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{q}{2\varrho_b} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + \frac{q}{2\varrho_b} = 0$.

45. v, ϱ. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 + \frac{2\varrho}{v} \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 - 3 \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha + \frac{2\varrho}{v} = 0.$

46. $\varrho_b + \varrho$, w_a. Aufl. $\sin {}^1/_2 \alpha^3 - \frac{w_a}{\varrho_b + \varrho} \sin {}^1/_2 \alpha^2 - \sin {}^1/_2 \alpha + \frac{3 w_a}{4(\varrho_b + \varrho)} = 0.$

47. $\varrho_b + \varrho$, p. Aufl. $\cot \beta^3 - \frac{2p}{\varrho_b + \varrho} \cot \beta^2 - \cot \beta - \frac{2p}{\rho_b + \rho} = 0.$

48. $\varrho_b - \varrho$, p. Aufl. $\cos \beta^3 + \frac{p}{\varrho_b - \varrho} \cos \beta^2 - {}^1/_2 \cos \beta - \frac{p}{\varrho_b - \varrho} = 0.$

49. $\varrho_b + \varrho$, p — q. Aufl. $\operatorname{tg} \alpha^3 - \frac{2(p-q)}{\varrho_b + \varrho} \operatorname{tg} \alpha^2 - 3 \operatorname{tg} \alpha - \frac{2(p-q)}{\varrho_b + \varrho} = 0.$

50. $\varrho_b - \varrho$, p — q. Aufl. $\sin \alpha^3 + \frac{p-q}{2(\varrho_b - \varrho)} \sin \alpha^2 - {}^3/_4 \sin \alpha - \frac{p-q}{2(\varrho_b - \varrho)} = 0.$

51. $h_b - \varrho$, u. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 + \frac{h_b - \varrho}{u} \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 - 3 \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha + \frac{h_b - \rho}{u} = 0.$

52. $h_b + \varrho_b$, u. Aufl. $\cot {}^1/_2 \alpha^3 - \frac{h_b + \varrho_b}{3u} \cot {}^1/_2 \alpha^2 - {}^1/_3 \cot {}^1/_2 \alpha - \frac{h_b + \varrho_b}{3u} = 0.$

53. $h_b - \varrho$, v. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 - \frac{2(h_b - \varrho)}{v} \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 - 3 \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha + \frac{2(h_b - \varrho)}{v} = 0.$

54. $h_b + \rho_b$, v. Aufl. $\cot {}^1/_2 \alpha^3 - \frac{2(h_b + \varrho_b)}{3v} \cot {}^1/_2 \alpha^2 - {}^1/_3 \cot {}^1/_2 \alpha + \frac{2(h_b + \varrho_b)}{3v} = 0.$

55. $h_b - \varrho$, u — v. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 - \frac{3(h_b - \varrho)}{u - v} \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 - 3 \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha - \frac{h_b - \varrho}{u - v} = 0.$

56. $h_b + \rho_b$, u — v. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 + \frac{u - v}{3(h_b + \varrho_b)} \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 - {}^1/_3 \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha - \frac{u - v}{h_b + \varrho_b} = 0.$

57. w_a, $u - v$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \alpha^3 + \frac{w_a}{2\,(u - v)} \cos {}^1/_2 \alpha^2 - {}^1/_2 \cos {}^1/_2 \alpha - \frac{3\,w_a}{8\,(u - v)} = 0.$

58. p, u. Aufl. $\cos \alpha^3 + {}^1/_2 \cos \alpha^2 - {}^1/_2 \cos \alpha + \frac{p - u}{4\,u} = 0.$

59. p, v. Aufl. $\sin \beta^3 + {}^1/_2 \sin \beta^2 + \frac{p - v}{2\,v} \sin \beta - {}^1/_4 = 0.$

60. p, $u - v$. Aufl. $\sin \beta^3 + {}^1/_2 \sin \beta^2 - \frac{p + u - v}{2\,(u - v)} \sin \beta + \frac{p - (u - v)}{4\,(u - v)} = 0.$

61. q, $u - v$. Aufl. $\cos \alpha^3 + {}^1/_2 \cos \alpha^2 + \frac{q}{2\,(u - v)} \cos \alpha - \frac{q}{4\,(u - v)} = 0.$

62. $p - q$, u. Aufl. $\cos \alpha^3 + {}^1/_2 \cos \alpha^2 - {}^1/_4 \cos \alpha - \frac{u - (p - q)}{8\,u} = 0.$

63. $p - q$, v. Aufl. $\cos \alpha^3 + {}^1/_2 \cos \alpha^2 - \frac{v - (p - q)}{4\,v} \cos \alpha - {}^1/_8 = 0.$

64. r, $h_b + h_a$. Aufl. $\cos \alpha^3 + {}^1/_2 \cos \alpha^2 - \cos \alpha - \left({}^1/_2 - \frac{h_b + h_a}{4\,r}\right) = 0.$

65. r, $h_b - h_a$. Aufl. $\cos \alpha^3 - {}^1/_2 \cos \alpha^2 - \cos \alpha - \left(\frac{h_b - h_a}{4\,r} - {}^1/_2\right) = 0.$

66. $h_b + h_a$, $\varrho_b + \varrho$. Aufl. $\cos \alpha^3 + {}^1/_2 \cos \alpha^2 + \left(\frac{h_b + h_a}{\varrho_b + \varrho} - 1\right) \cos \alpha - {}^1/_2 = 0.$

67. $h_b - h_a$, $\varrho_b + \varrho$. Aufl. $\cos \alpha^3 - {}^1/_2 \cos \alpha^2 - \left(\frac{h_b - h_a}{\varrho_b + \varrho} + 1\right) \cos \alpha + {}^1/_2 = 0.$

68. $h_b + h_a$, $\varrho_b - \varrho$. Aufl. $\cos \alpha^3 + \left(\frac{h_b + h_a}{\varrho_b - \varrho} + {}^1/_2\right) \cos \alpha^2 - \cos \alpha - {}^1/_2 = 0.$

69. $h_b - h_a$, $\varrho_b - \varrho$. Aufl. $\cos \alpha^3 - \left(\frac{h_b - h_a}{\varrho_b - \varrho} + {}^1/_2\right) \cos \alpha^2 - \cos \alpha + {}^1/_2 = 0.$

70. $b + h_b, \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 - \frac{2\varrho}{b + h_b} \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 + \left(\frac{2\varrho}{b+h_b} - 1\right)$ $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha + \frac{2\varrho}{b + h_b} = 0.$

71. $b - h_b, \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 - \frac{2\varrho}{b - h_b} \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 - \left(\frac{2\varrho}{b - h_b} + 1\right)$ $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha + \frac{2\varrho}{b - h_b} = 0.$

72. $b + h_b, \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 - \left(\frac{b + h_b}{2\varrho_b} + 1\right) \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 - \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha$ $+ \frac{b + h_b}{2\varrho_b} = 0.$

73. $b - h_b, \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 - \left(\frac{b - h_b}{2\varrho_b} - 1\right) \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 - \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha$ $+ \frac{b - h_b}{2\varrho_b} = 0.$

74. $b + h_b, h_b - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 + \frac{2(h_b - \varrho)}{b + h_b} \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 +$ $\left(1 - \frac{2(h_b - \varrho)}{b + h_b}\right) \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha - \frac{2(h_b - \varrho)}{b + h_b} = 0.$

75. $b - h_b, h_b - \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 + \frac{2(h_b - \varrho)}{b - h_b} \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 +$ $\left(1 + \frac{2(h_b - \varrho)}{b - h_b}\right) \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha - \frac{2(h_b - \varrho)}{b - h_b} = 0.$

76. $b + h_b, h_b + \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 - \left[1 - \frac{b + h_b}{2(h_b + \varrho_b)}\right] \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 -$ $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha + \frac{b + h_b}{2(h_b + \varrho_b)} = 0.$

77. $b - h_b, h_b + \varrho_b$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^3 + \left[1 + \frac{b - h_b}{2(h_b + \varrho_b)}\right] \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha^2 -$ $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha + \frac{b - h_b}{2(h_b + \varrho_b)} = 0.$

c) Aufgaben über das allgemeine Dreieck; 78 bis 81 führen auf reducirte cubische Gleichungen. Die zur Auflösung führenden Wege sind §. 14 angegeben.

78. $r, h_b + h_a, \delta$. Aufl. $\sin {}^1/_2 \gamma^3 - \sin {}^1/_2 \gamma + \frac{h_b + h_a}{8 r \cos {}^1/_2 \delta} = 0.$

79. $r, h_b - h_a, \delta$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \gamma^3 - \cos {}^1/_2 \gamma + \frac{h_b - h_a}{8 r \sin {}^1/_2 \delta} = 0.$

80. $h_b + h_a, p - q, \delta$. Aufl. $\sin {}^1/_2 \gamma^3 - \sin {}^1/_2 \gamma + \frac{h_b + h_a}{2(p - q)} \sin {}^1/_2 \delta = 0.$

81. $h_b - h_a, p - q, \delta$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \gamma^3 - \cos {}^1/_2 \gamma + \frac{h_b - h_a}{2(p-q)} \cos {}^1/_2 \delta = 0$.

82. $r, h_c, u - v$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \delta^3 + \frac{u - v}{2 h_c} \operatorname{tg} {}^1/_2 \delta^2 - \frac{2 r - h_c}{h_c}$

$\operatorname{tg} {}^1/_2 \delta + \frac{u - v}{2 h_c} = 0$.

83. $h_c, h_b + h_a, \delta$. Aufl. $\sin {}^1/_2 \gamma^3 - \frac{h_b + h_a}{4 h_c \cos {}^1/_2 \delta} \sin {}^1/_2 \gamma^2 - \sin {}^1/_2 \gamma$

$+ \frac{h_b + h_a}{4 h_c} \cos {}^1/_2 \delta = 0$.

84. $h_c, h_b - h_a, \delta$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \gamma^3 + \frac{h_b - h_a}{4 h_c \sin {}^1/_2 \delta} \cos {}^1/_2 \gamma^2 - \cos {}^1/_2 \gamma$

$- \frac{h_b - h_a}{4 h_c} \sin {}^1/_2 \delta = 0$.

85. $h_b + h_a, w_c, \delta$. Aufl. $\sin {}^1/_2 \gamma^3 - \frac{h_b + h_a}{4 w_c \cos {}^1/_2 \delta^2} \sin {}^1/_2 \gamma^2 - \sin {}^1/_2 \gamma$

$+ \frac{h_b + h_a}{4 w_c} = 0$.

86. $h_b - h_a, w_c, \delta$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \gamma^3 + \frac{h_b - h_a}{4 w_c \sin \delta} \cos {}^1/_2 \gamma^2 - \cos {}^1/_2 \gamma$

$- \frac{h_b - h_a}{4 w_c} \operatorname{tg} {}^1/_2 \delta = 0$.

87. $p - q, w_c, \gamma$. Aufl. $\sin {}^1/_2 \delta^3 - \frac{p - q}{2 w_c} \sin {}^1/_2 \delta^2 - \sin {}^1/_2 \delta +$

$\frac{p - q}{2 w_c} \cos {}^1/_2 \gamma^2 = 0$.

88. s, ab, δ. Aufl. $\sin {}^1/_2 \gamma^3 + \cos {}^1/_2 \delta \sin {}^1/_2 \gamma^2 - \frac{s^2 + ab}{ab}$

$\sin {}^1/_2 \gamma + \frac{s^2 - ab}{ab} \cos {}^1/_2 \delta = 0$.

89. $s - c, ab, \delta$. Aufl. $\sin {}^1/_2 \gamma^3 - \cos {}^1/_2 \delta \sin {}^1/_2 \gamma^2 - \frac{ab + (s - c)^2}{ab}$

$\sin {}^1/_2 \gamma + \frac{ab - (s - c)^2}{ab} \cos {}^1/_2 \delta = 0$.

90. $s - a, ab, \delta$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \gamma^3 - \sin {}^1/_2 \delta \cos {}^1/_2 \gamma^2 - \frac{ab - (s - a)^2}{ab}$

$\cos {}^1/_2 \gamma + \frac{ab + (s - a)^2}{ab} \sin {}^1/_2 \delta = 0$.

91. $h_b + h_a, ab, \delta$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \gamma^6 - \cos {}^1/_2 \gamma^4 + \frac{(h_b + h_a)^2}{16\, ab \cos {}^1/_2 \delta^2}$

$\cos {}^1/_2 \gamma^2 - \frac{(h_b + h_a)^2 \operatorname{tg} {}^1/_2 \delta^2}{16\, ab} = 0$.

92. $s - c,\ a^2 + b^2 - c^2,\ \delta$. Aufl. $\sin{}^1/_2\gamma^3 - \frac{\{a^2+b^2-c^2-4(s-c)^2\}\cos{}^1/_2\delta}{a^2+b^2-c^2+4(s-c)^2}\sin{}^1/_2\gamma^2 - \frac{a^2+b^2-c^2+2(s-c)^2}{a^2+b^2-c^2+4(s-c)^2}$

$\sin{}^1/_2\gamma + \frac{\{a^2+b^2-c^2-2(s-c)^2\}\cos{}^1/_2\delta}{a^2+b^2-c^2+4(s-c)^2} = 0.$

d) Aufgaben über das Dreieck, wenn Radien der Berührungskreise gegeben. 93 führt auf eine reducirte cubische Gleichung. Die zur Auflösung führenden Wege sind §. 15 angegeben.

93. $a + b,\ u - v,\ \varrho_a + \rho_b$. Aufl. $\operatorname{tg}{}^1/_2\delta^3 + \frac{(a+b)^2 - (\varrho_a+\varrho_b)^2}{(a+b)^2}$

$\operatorname{tg}{}^1/_2\delta - \frac{(u-v)(\rho_a+\rho_b)}{(a+b)^2} = 0.$

94. a, b, ϱ. Aufl. $\cot{}^1/_2\gamma^3 - \frac{a+b}{\varrho}\cot{}^1/_2\gamma^2 + \frac{ab+\varrho^2}{\varrho^2}\cot{}^1/_2\gamma$

$- \frac{a+b}{\varrho} = 0.$

95. a, b, ϱ_c. Aufl. $\cot{}^1/_2\gamma^3 - \frac{a+b}{\varrho_c}\cot{}^1/_2\gamma^2 + \frac{ab+\varrho_c{}^2}{\varrho_c{}^2}\cot{}^1/_2\gamma$

$- \frac{a+b}{\varrho_c} = 0.$

96. r, ϱ, w_c. Aufl. $\sin{}^1/_2\gamma^3 - \frac{2\varrho}{w_c}\sin{}^1/_2\gamma^2 + \frac{\varrho}{2r}\sin{}^1/_2\gamma -$

$\frac{\rho^2}{2rw_c} = 0.$

97. r, ϱ_c, w_c. Aufl. $\sin{}^1/_2\gamma^3 - \frac{2\varrho_c}{w_c}\sin{}^1/_2\gamma^2 - \frac{\varrho_c}{2r}\sin{}^1/_2\gamma +$

$\frac{\varrho_c{}^2}{2rw_c} = 0.$

98. $a + b,\ r,\ \varrho$. Aufl. $\operatorname{tg}{}^1/_2\gamma^3 - \frac{2(2r+\rho)}{a+b}\operatorname{tg}{}^1/_2\gamma^2 + \frac{a+b}{4r}$

$\operatorname{tg}{}^1/_2\gamma - \frac{2\varrho}{a+b} = 0.$

99. $a + b,\ w_c,\ \varrho_a + \varrho_b$. Aufl. $\cos{}^1/_2\gamma^3 - \frac{(a+b)^2 + (\varrho_a+\varrho_b)^2}{2w_c(a+b)}$

$\cos{}^1/_2\gamma^2 - \frac{(\varrho_a+\varrho_b)^2}{2w_c(a+b)} = 0.$

100. $w_c,\ u - v,\ \varrho_c + \varrho$. Aufl. $\sin{}^1/_2\delta^3 + \frac{(\varrho_c+\varrho)^2 + (u-v)^2}{2w_c(u-v)}$

$\sin{}^1/_2\delta^2 - \sin{}^1/_2\delta - \frac{u-v}{2w_c} = 0.$

101. $w_c, p-q, \varrho_c+\varrho$. Aufl. $\sin{}^1/_2\gamma^3 - \frac{(\varrho_c+\varrho)\{(p-q)^2+(\varrho_c+\varrho)^2\}}{2\,w_c\,(p-q)^2}$

$\sin{}^1/_2\gamma^2 - \frac{(\varrho_c+\varrho)^2}{(p-q)^2}\sin{}^1/_2\gamma + \frac{(\varrho_c+\varrho)^3}{2\,w_c\,(p-q)^2} = 0.$

e) Aufgaben über das Dreieck, wenn ein Verhältniß gegeben. 102 führt auf eine reducirte cubische Gleichung. Die zur Auflösung führenden Wege sind §. 17 angegeben.

102. $c : a+b = m : n,\ h_b + h_a,\ w_c$. Aufl. $\sin{}^1/_2\gamma^3 - \sin{}^1/_2\gamma + \frac{(n^2-m^2)(h_b+h_a)}{4\,n^2\,w_c} = 0.$

103. $a : b = m : n,\ r,\ w_c$. Aufl. $\cos{}^1/_2\delta^3 - \frac{w_c}{2\,r}\cos{}^1/_2\delta^2 - \cos{}^1/_2\delta + \frac{w_c\,(m+n)^2}{8\,m\,n\,r} = 0.$

104. $c : a+b = m : n,\ h_b + h_a,\ p-q$. Aufl. $\cos{}^1/_2\gamma^6 - \cos{}^1/_2\gamma^4 + \frac{n^2\,(h_b+h_a)^2}{4\,m^2\,(u-v)^2}\cos{}^1/_2\gamma^2 - \frac{(n^2-m^2)\,(h_b+h_a)^2}{4\,m^2\,(u-v)^2} = 0$

oder $\operatorname{tg}{}^1/_2\delta^3 - \frac{2\,m\,(p-q)}{n\,(h_b+h_a)}\operatorname{tg}{}^1/_2\delta^2 + \operatorname{tg}{}^1/_2\delta - \frac{2\,m\,(p-q)\,(n^2-m^2)}{n^3\,(h_b+h_a)} = 0.$

f) Aufgaben über das Dreieck, wenn eine Relation zwischen den Winkeln gegeben. 105, 106, 107 führen auf reducirte cubische Gleichungen. Die zur Auflösung führenden Wege sind §. 18 angegeben.

105. $\alpha = 4\,\beta,\ a,\ b$. Aufl. $\cos\beta^3 - {}^1/_2\cos\beta - \frac{a}{8\,b} = 0.$

106. $\alpha = 4\,\beta,\ h_a,\ h_b$. Aufl. $\cos\beta^3 - {}^1/_2\cos\beta - \frac{h_b}{8\,h_a} = 0.$

107. $\alpha = 4\,\beta,\ u,\ v$. Aufl. $\cos\beta^3 - {}^1/_2\cos\beta - \frac{u}{8\,v} = 0.$

108. $\alpha = 3\,\beta,\ h_c,\ p-q$. Aufl. $\operatorname{tg}\beta^3 + \frac{2\,h_c}{p-q}\operatorname{tg}\beta^2 - 3\operatorname{tg}\beta + \frac{2\,h_c}{p-q} = 0.$

Dritter Abschnitt.

Vierecks-Aufgaben.

A. Einfache Vierecksaufgaben, welche durch Anwendung der vier Hauptfälle zu lösen sind.

§. 20.

Aufgaben über den Rhombus.

Man suche △ ABD, ABC, AEB, AGD zu berechnen, wo DG ⊥ AB. Die zu berechnenden Stücke sind dann h, a, α, e, f, F, soweit sie nicht schon gegeben sind.

1. a, α	4. e, f	7. h, α	10. F, e
2. f, α	5. a, h	8. F, a	11. F, h
3. a, f	6. e, h	9. F, α	

§. 21.

Aufgaben über das Antiparallelogramm, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt.

Zunächst beachte man, daß $a + c = 2b$ ist. Fällt man ferner von C auf AB die Senkrechte $CG = 2\varrho$, so ist $AG = \frac{1}{2}(a + c) = b$, $GB = \frac{1}{2}(a - c)$, und mithin $F = (a + c)\varrho = 2b\varrho$. Von den in der Figur entstandenen Dreiecken sind besonders AGC und BGC ins Auge zu fassen.

1. b, α	5. e, ϱ	8. ϱ, β'	11. a — c, ϱ
2. b, ϱ	6. e, β'	9. b, a — c	12. F, b
3. ϱ, α	7. b, β'	10. a — c, α	13. F, ϱ.
4. e, b			

Es ist $\operatorname{tg}\beta' = \frac{2\varrho}{b} = \sin\alpha$, so daß von den Winkeln α und β' durch den einen auch der andere gegeben ist. Der Radius r des umschriebenen Kreises steht mit e und α durch die Gleichung $e = 2r\sin\alpha$ in Verbindung, ebenso mit b und β' durch die Gleichung $b = 2r\sin\beta'$.

14. e, α	16. e, r	18. r, β'	19. b, r.
15. a — c, β'	17. r, α		

§. 22.

Aufgaben über das Parallelogramm.

Man fälle auf AB die Senkrechten $DF = h_a$, $CG = h_a$, $EH = \frac{1}{2} h_a$, ebenso auf AD die Höhe $BI = h_b$. Die gesuchten Stücke sind aus einem oder auch aus mehreren der entstandenen Dreiecke nacheinander zu berechnen.

1. a, b, e	11. b, α, α''	20. b, h_a, β'	29. e, ε, β'
2. a, b, α	12. b, α, α'	21. b, h_a, α''	30. a, e, ε
3. a, e, α	13. h_a, h_b, α	22. b, h_a, β''	31. a, e, β''
4. a, e, β'	14. h_a, β', α''	23. b, h_a, α'	32. e, h_a, ε
5. a, b, α'	15. a, h_a, α	24. b, h_a, e	33. a, e, h_a
6. a, α, β'	16. h_a, α, β''	25. a, b, h_a	34. e, f, h_a
7. a, e, α''	17. h_a, α, α'	26. a, e, f	35. e, h_a, β''
8. e, α, β'	18. h_a, e, α	27. e, f, ε	36. e, h_a, α''
9. b, h_b, α	19. a, h_a, h_b	28. a, β', β''	37. e, f, α'.
10. b, β', α''			

Ist unter den gegebenen Stücken der Inhalt F des Parallelogramms, so kommen die Formeln $F = a h_a = b h_b = ab \sin\alpha = \frac{1}{2} ef \sin\varepsilon = ae \sin\beta'$ und andere zur Anwendung, welche sich aus den Inhaltsformeln für die Dreiecke ABC, AEB 2c. ergeben.

38. F, a, b	42. F, h_a, α	45. F, a, β'	48. F, β', α''
39. F, a, α	43. F, a, e	46. F, e, β'	49. F, β', β''
40. F, e, f	44. F, h_a, e	47. F, b, h_a	50. F, h_a, h_b
41. F, e, ε			

§. 23.

Aufgaben über das Antiparallelogramm.

Fällt man auf AB die Höhe $CF = h$, so ist $AF = \frac{1}{2}(a + c)$; $FB = \frac{1}{2}(a - c)$. Die gesuchten Stücke sind aus den durch Zeichnung von AC und CF entstandenen Dreiecken zu berechnen. Zu beachten ist, daß $F = \frac{1}{2}(a + c)\, h$.

1. a, b, e	8. a, b, α'	15. b, α, γ'
2. a, b, α	9. a, b, β'	16. e, h, α
3. b, e, α'	10. a, e, α	17. h, α, α'
4. a, e, β'	11. a, e, α'	18. a, h, α
5. a, α, β'	12. b, e, α	19. c, h, α
6. b, α, α'	13. b, e, β'	20. a + c, h, α
7. e, α, β'	14. b, a + c, α	21. h, α, β'

22. b, h, a + c
23. a, b, h
24. b, h, β'
25. b, h, γ'
26. b, e, h
27. b, h, α'
28. a — c, e, α
29. a, c, α
30. a — c, α, β'
31. a — c, α, α'
32. a — c, h, β'
33. a — c, h, γ'
34. a — c, h, α'
35. a — c, h, e
36. a, c, h
37. b, a — c, e
38. b, a — c, β'
39. b, a — c, γ'
40. b, a — c, α'
41. a, b, c
42. e, γ', β'
43. e, a + c, α
44. e, a + c, γ'
45. e, a + c, α'
46. e, a + c, b
47. e, a, c
48. a + c, α, β'
49. a + c, α' β'
50. a + c, b, β'
51. a, c, β'
52. a, h, β'
53. a + 2 b + c, h, β'
54. a + 2 b + c, e, β'
55. a + 2 b + c, e, h
56. a + 2 b + c, F, h
57. F, h, α
58. F, a + c, α
59. F, b, h
60. F, b, a + c
61. F, a, c
62. F, a, h
63. F, h, a — c
64. F, b, α
65. F, a + c, α'
66. F, a — c, α
67. F, a — c, b.

Der Radius r des umschriebenen Kreises steht mit e und α durch die Gleichung $e = 2r \sin\alpha$ in Verbindung, ebenso mit a und α' durch $a = 2r \sin\alpha'$, mit b und β' durch $b = 2r \sin\beta'$, und mit c und γ' durch $c = 2r \sin\gamma'$.

68. r, α, β'
69. e, r, β'
70. a, c, r
71. a, r, α
72. b, e, r
73. b, r, α
74. h, e, r
75. h, r, α
76. a — c, e, r
77. a — c, r, α
78. e, r, γ'
79. a + c, e, r
80. a + c, r, α
81. a, b, r
82. b, r, α'
83. e, r, α'
84. a, r, β'
85. b, h, r
86. h, r, β'
87. a — c, b, r
88. a — c, r, β'
89. a + c, b, r
90. a + c, r, β'
91. a — c, h, r
92. e, r, β'
93. a + c, h, r
94. a, r, β'
95. h, r, β'
96. a, c, α' (§. 14, 233)
97. a, c, r (§. 14, 233)
98. a, r, γ' (§. 14, 233)
99. F, h, r.

§. 24.

Aufgaben über das Trapez.

In den folgenden Aufgaben suche man die durch eine Diagonale und 2 Seiten gebildeten Dreiecke nacheinander zu berechnen. Ist h unter den gegebenen Stücken, so fälle man auf AB die Senkrechte CF und beachte die Dreiecke ACF und BCF. Wegen der Gleichung $F = \frac{1}{2}(a + c)\, h$ ist durch drei der Stücke a, c, h und F auch das vierte gegeben.

1. a, b, c, e
2. a, b, d, e
3. a, b, c, γ''
4. a, b, c, α
5. a, b, c, β
6. a, b, d, β
7. a, b, α, β
8. a, b, β, γ''
9. a, c, e, β'
10. a, d, e, β'
11. a, e, β', γ''
12. b, c, e, α''
13. b, d, e, α''
14. b, e, α, α''
15. b, e, α'', γ''
16. c, e, β', α''
17. d, e, β', α''
18. e, β', α'', γ''
19. a, b, c, α''
20. a, b, d, α''
21. a, b, α, α''
22. a, b, α'', γ''
23. a, b, c, β'
24. a, b, d, β'
25. a, b, β', γ''
26. a, c, e, β
27. a, d, e, β
28. a, e, α, β
29. a, e, β, γ''
30. a, c, e, α''
31. a, d, e, α''
32. a, e, α, α''
33. a, e, α'', γ''
34. b, c, e, β
35. b, d, e, β
36. b, e, α, β
37. b, e, β, γ''
38. b, c, e, β'
39. b, d, e, β'
40. b, e, β', γ''
41. a, b, e, f
42. a, b, f, β
43. a, e, f, β'
44. b, e, f, α''
45. e, f, β', α''
46. a, f, β, β'
47. a, b, f, α''
48. a, b, f, β'
49. a, e, f, β
50. a, e, f, α''
51. b, e, f, β
52. b, e, f, β'
53. a, b, β'', γ'
54. b, β', β'', γ'
55. a, b, α'', β''
56. a, b, α'', γ'
57. b, e, α'', γ'
58. a, b, e, β''
59. a, b, e, γ'
60. a, e, β', β''
61. a, e, β', γ'
62. b, e, α'', β''
63. a, β', β'', α''
64. e, β', β'', γ'
65. a, b, β', β''
66. a, b, β', γ'
67. a, e, β', γ'
68. a, e, α'', β''
69. a, e, α'', γ'
70. b, e, β'', γ'
71. b, e, β', β''
72. b, e, β', γ'
73. b, c, e, h
74. b, d, e, h
75. b, e, h, α
76. b, e, h, γ''
77. b, e, f, h
78. c, e, h, β
79. d, e, h, β
80. e, h, α, β
81. a, e, h, α
82. e, h, β, γ''
83. e, f, h, β
84. b, c, h, β'
85. b, d, h, β'
86. b, h, α, β'
87. b, f, h, β'
88. c, h, β, β'
89. d, h, β, β'
90. h, β, β', γ''
91. f, h, β, β'
92. a, b, d, h
93. a, b, c, h
94. a, b, h, α
95. a, b, h, γ''
96. a, b, f, h
97. a, c, e, h
98. a, h, β'', γ'
99. a, b, h, β''
100. a, b, h, γ'
101. a, b, c, F
102. a, b, h, F
103. a, c, e, F
104. a, e, h, F
105. a, e, F, α
106. a, e, F, β'
107. a, h, F, β
108. a, h, F, β'
109. a, h, F, α.

§. 25.

Aufgaben über das Sehnenviereck.

Durch drei der sämmtlichen Winkel α, β, γ, δ, ε, α', β'. γ', δ' sind auch die anderen gegeben. Kennt man z. B. α, β, ε, so findet man

die übrigen vier Winkel aus den vier Gleichungen $\beta' + \gamma' = \alpha$, $\gamma' + \delta' = \beta$, $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ und $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = \pi$.

a) Aufgaben, in denen r gegeben ist. Aus r und einer Sehne kann man stets den zugehörigen Peripheriewinkel berechnen. z. B. findet man aus a und r die Gleichung $\sin\alpha' = \frac{a}{2\,r}$. Auf diese Weise findet man die nicht schon gegebenen Winkel α', β', γ', δ', und aus diesen und r die noch fehlenden Seiten.

1. r, α', β', γ'
2. r, a, β', γ'
3. r, a, β', δ'
4. r, a, α, ε
5. r, a, α, β
6. r, e, β', γ'
7. r, e, β', δ'
8. r, e, α, ε
9. r, a, b, γ'
10. r, a, b, α
11. r, a, b, ε
12. r, a, c, β'
13. r, a, c, α
14. r, a, e, γ'
15. r, a, e, δ'
16. r, a, e, α
17. r, a, e, ε
18. r, e, f, α'
19. r, e, f, ε
20. r, a, b, c
21. r, a, c, e
22. r, a, e, f.

b) Der Radius r ist nicht gegeben. Befindet sich unter den gegebenen Stücken eine Sehne und der zugehörige Peripheriewinkel, so kann man ähnlich wie bei a) r berechnen, wodurch die Aufgabe auf den vorigen Fall zurückgeführt ist. Es genügt natürlich, den Ausdruck von r in die resultirenden Formeln einzusetzen, ohne dasselbe für sich numerisch zu berechnen.

23. a, c, β', γ'
24. e, f, α, ε
25. a, e, f, α
26. a, e, f, α'
27. e, f, α', β'
28. e, f, α, β'.

Läßt sich aus drei der gegebenen Stücke ein von einer Diagonale und zwei Seiten gebildetes Dreieck berechnen, so kennt man von dem anderen Dreiecke eine Seite (nämlich die Diagonale) und den gegenüberliegenden Winkel. Ein drittes Bestimmungsstück liefert das vierte der gegebenen Stücke unmittelbar oder mittelbar. Ist ε gegeben, so suche man noch zwei andere Winkel zu berechnen, wodurch dann alle oben angegebenen Winkel des Vierecks bekannt sind.

29. a, b, c, e
30. a, b, e, δ'
31. a, b, e, α
32. a, b, c, β
33. a, b, γ', δ'
34. a, b, α, β
35. a, e, β', δ'
36. a, b, e, ε
37. a, b, β, ε
38. a, e, β, ε.

In den folgenden Aufgaben kann man beide Methoden anwenden.

39. a, α', β', γ'
40. e, α', β', γ'
41. a, b, α', γ'
42. a, b, β', γ'
43. a, b, α, β'
44. a, c, α', β'
45. a, d, α', β'
46. a, e, β', γ'
47. a, e, α, β
48. a, e, α', δ'
49. a, e, α', γ'
50. a, e, γ', δ'
51. a, b, c, β'
52. a, b, c, γ'
53. a, d, e, β
54. a, d, e, α'
55. a, c, e, β
56. a, c, e, α'
57. a, e, γ', δ'.

Ist außer dreien das Dreieck ABC bestimmenden Stücken f gegeben, so findet man die fehlenden Stücke aus den Dreiecken ABD und DBC. Auch kann man r berechnen und wie vorher verfahren.

58. a, f, α', β'
59. e, f, α', β'
60. a, b, f, β
61. a, e, f, β'
62. a, b, f, β'
63. a, e, f, α'
64. a, e, f, β
65. a, b, e, f.

§. 26.

Aufgaben über das Tangentenviereck.

In den folgenden Aufgaben kann man aus dreien der gegebenen Stücke ein durch eine Diagonale und zwei Seiten gebildetes Dreieck berechnen. Zur Berechnung des anderen bemerke man, daß durch drei Seiten auch die vierte gegeben ist, da $a + c = b + d$ oder $a - b = d - c$ ist.

1. a, b, c, e
2. a, b, c, β.
3. a, b, c, α''
4. a, c, e, β
5. a, c, e, α''
6. a, c, e, β'
7. a, d, e, β
8. a, d, e, α''
9. a, d, e, β'
10. a, c, β, β'
11. a, d, β, β'
12. a, c, β', α''
13. a, b, $c + d$, e
14. a, b, $c + d$, β
15. e, $c + d$, β', α''
16. a, $c + d$, β', α''
17. a, $c + d$, e, β'
18. a, b, $c + d$, α''
19. a, $c + d$, e, β
20. a, $c + d$, e, α''
21. a, b, e, $c^2 - d^2$
22. a, b, β, $c^2 - d^2$
23. a, e, β', $c^2 - d^2$
24. a, $c^2 - d^2$, β', α''
25. e, $c^2 - d^2$, β', α''
26. a, b, $c^2 - d^2$, α''
27. a, e, $c^2 - d^2$, β
28. a, e, $c^2 - d^2$, α''.

§. 27.

Einfache Aufgaben über das allgemeine Viereck.

a) Man berechne mittelst der vier Hauptfälle die beiden Dreiecke ABC und ADC, in welche das Viereck durch eine Diagonale getheilt wird, einzeln.

1. e, β', α'', γ'', δ'
2. c, e, γ'', β', α''
3. c, e, α'', β', δ'
4. c, e, α'', β', δ
5. c, d, e, α'', β'
6. a, e, β', γ, γ''
7. a, c, e, β', γ''
8. a, c, c, β', δ'
9. a, c, e, β', γ
10. a, c, e, β', δ
11. a, d, e, β', γ''
12. a, d, e, β', δ'
13. a, d, e, β', δ
14. a, d, e, β', γ
15. a, e, β', γ, γ''
16. a, c, e, α'', γ''
17. a, d, e, α, α''
18. a, d, e, α'', δ'
19. a, d, e, α'', δ
20. a, c, e, α, α''
21. a, c, α, α'', δ'
22. a, b, e, α, δ'
23. a, b, e, α, γ
24. a, b, c, e, γ''
25. a, b, c, e, α
26. a, b, c, e, δ'
27. a, b, c, e, γ
28. a, b, c, e, δ
29. a, b, c, d, e
30. a, c, e, β, γ''

31. a, c, e, α, β
32. a, c, e, β, δ
33. a, c, e, β, γ
34. a, d, e, α, β
35. a, d, e, β, γ
36. a, d, e, β, δ
37. a, e, α, β, δ'
38. a, e, β, γ, γ''
39. a, e, α, β, γ.

b) Drei der gegebenen Stücke dienen zur Berechnung von △ ABC. Mittelst des hierdurch gefundenen Werthes von e und der beiden anderen gegebenen Stücke läßt sich △ ADC berechnen.

40. a, α'', β', γ'', δ'
41. a, c, α'', β', γ''
42. a, c, α'', β', δ'
43. a, c, α'', β', δ
44. a, d, α'', β', γ''
45. a, d, α'', β', δ'
46. a, d, α'', β', δ
47. a, c, d, α'', β'
48. a, b, β, γ'', δ'
49. a, b, α, β, δ'
50. a, b, α, β, γ
51. a, b, c, β, γ''
52. a, b, c, β, δ'
53. a, b, c, β, γ
54. a, b, c, α, β
55. a, b, c, β, δ
56. a, b, c, d, β
57. a, b, α'', γ'', δ'
58. a, b, α, α'', δ'
59. a, b, c, α'', γ''
60. a, b, c, α, α''
61. a, b, c, α'', δ'
62. a, b, c, α'', δ
63. a, b, d, α'', γ''
64. a, b, d, α, α''
65. a, b, d, α'', δ'
66. a, b, d, α'', δ
67. a, b, c, d, α''.

c) Drei der gegebenen Stücke dienen zur Berechnung von △ ABC, unter den beiden anderen befindet sich f oder ein an f anliegender Winkel (α', δ'', β'', γ'). Nachdem man a und b, wenn sie nicht gegeben sind, aus △ ABC berechnet hat, kann man die Dreiecke ABD und CBD nacheinander berechnen.

68. a, c, f, β', α''
69. a, c, α'', β', β''
70. a, c, α'', β', γ'
71. a, d, α'', β', γ'
72. a, f, α'', β', γ''
73. a, α'', β', γ', γ''
74. a, f, α'', β', δ'
75. a, α'', β', β'', δ'
76. a, f, α', α'', β'
77. a, f, α'', β', β''
78. a, f, α'', β', γ'
79. c, e, f, β', α''
80. c, e, α'', β', ε
81. c, e, α'', β', β''
82. e, f, α'', β', γ''
83. e, f, α', α'', β'
84. e, f, α'', β', ε
85. e, α'', β', γ', γ''
86. a, b, c, β, ε
87. a, b, f, β, γ''
88. a, b, β, α', γ''
89. a, b, γ', γ'', δ''
90. a, b, f, β, ε
91. a, c, e, f, β'
92. a, c, e, β', β''
93. a, c, e, β', γ'
94. a, c, e, β', δ''
95. a, d, e, α', β'
96. a, d, e, β', γ'
97. a, d, e. β', δ''
98. a, e, f, β', γ'
99. a, e, β', γ', γ''
100. a, e, f, β', δ'
101. a, e, f, β', γ
102. a, e, β', β'', δ'
103. a, e, β', β'', γ
104. a, e, β', γ', δ'
105. a, e, f, β', γ'
106. a, e, f, β', δ''
107. a, e, f, β', β''
108. a, e, α', β', γ'
109. a, b, c, α'', β''
110. a, b, c, α'', γ'
111. a, b, c, α'', δ''
112. a, b, d, α', α''
113. a, b, d, α'', γ'
114. a, b, f, α'', γ''
115. a, b, f, α, α''
116. a, b, α', α'', γ''
117. a, b, α, α', α''
118. a, b, α'', γ'', δ''
119. a, b, α, α'', ε
120. a, b, f, α'', δ'
121. a, b, α'', δ', δ''
122. a, b, f, α', α''
123. a, b, f, α'', β''
124. a, b, α'', β'', δ''
125. a, c, e, f, α''
126. a, c, e, α'', β''
127. a, c, e, α'', γ'

128. a, c, e, α'', δ''
129. a, d, e, α'', γ'
130. a, e, f, α'', γ''
131. a, e, f, α'', δ'
132. a, e, f, α, α''
133. a, e, f, α', α''
134. a, e, f, α'', β''
135. a, e, f, α'', γ'
136. a, e, f, α'', δ''
137. a, e, α', α'', γ'
138. a, e, α'', γ'', δ''
139. a, e, α'', β'', δ'
140. a, e, α'', δ', δ''
141. a, e, α, α'', γ'
142. a, c, e, f, β
143. a, c, e, β, β''
144. a, c, e, γ', δ''
145. a, c, e, β, ε
146. a, d, e, β, ε
147. a, e, f, β, δ'
148. a, e, f, α, β
149. a, e, f, β, γ
150. a, e, f, β, β''
151. a, e, f, β, ε
152. a, e, α', β, γ''
153. a, e, γ', γ'', δ''
154. a, e, α, β, ε
155. a, e, β, β'', δ'
156. a, e, β, γ', δ'
157. a, e, β, γ, ε
158. a, b, c, e, f
159. a, b, c, e, β''
160. a, b, c, e, γ'
161. a, b, c, e, δ''
162. a, b, c, e, ε
163. a, b, e, f, γ''
164. a, b, e, f, α
165. a, b, e, f, α'
166. a, b, e, f, γ'
167. a, b, e f, ε
168. a, b, e, α', γ''
169. a, b, e, α', δ''
170. a, b, e, γ', γ''
171. a, b, e, α, γ'
172. a, b, e, γ'', δ''
173. a, b, e, α, ε
174. a, b, e, α', γ'.

B. Vierecks-Aufgaben, welche nicht unmittelbar durch Anwendung der vier Hauptfälle zu lösen sind.

§. 28.

Aufgaben über den Rhombus.

Man drücke die gegebenen Stücke durch a und α aus, und suche diese beiden Größen aus den erhaltenen Gleichungen zu bestimmen, so weit sie nicht selbst gegeben sind.

1. $e + f = s$, a. Aufl. Da $e = 2a \cos \frac{1}{2}\alpha$, $f = 2a \sin \frac{1}{2}\alpha$, so ist $s = 2a (\cos \frac{1}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\alpha)$, mithin $\sin (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha) = \dfrac{s}{2\sqrt{2} \,.\, a}$.

2. a, $e - f$ 4. $e - f$, α 5. $a + h$, α 6. $a - h$, α.
3. $e + f$, α

7. $e + h = s$, α. Aufl. $a = \dfrac{s}{4 \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{4}(\pi - \alpha)^2}$.

8. $e - h$, α. 9. $e + a$, α. 10. $e - a$, α.

11. $e + f = s$, h. Aufl. $a^2 + ha - \frac{1}{4}s^2 = 0$.

12. $e - f = d$, h. Aufl. $a^2 - ha - \frac{1}{4}d^2 = 0$.

13. $e + a = s$, f. Aufl. $2s \sin \frac{1}{2}\alpha - 2f \cos \frac{1}{2}\alpha = f$.

14. $e - a = d$, f. Aufl. $2f \cos \frac{1}{2}\alpha - 2d \sin \frac{1}{2}\alpha = f$.

15. F, $e + f$ (§. 10) 17. F, $a + h$. 18. F, $a - h$.
16. F, $e - f$ (§. 10)

§. 29.

Aufgaben über das Antiparallelogramm, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt.

In allen Fällen gelangt man zu einer Auflösung, indem man sämmtliche Stücke durch zwei derselben, α und ϱ ausdrückt. Man gelangt nämlich leicht zu den Gleichungen $a = 2\varrho \cot {}^1/_2\alpha$, $b = \varrho(\cot {}^1/_2\alpha + \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha) = \frac{2\varrho}{\sin\alpha}$, $c = 2\varrho \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha$, $a - c = 4\varrho \cot\alpha$, $a - b = b - c = {}^1/_2(a - c) = 2\varrho \cot\alpha$, $a + b = \frac{2\varrho(2 + \cos\alpha)}{\sin\alpha}$, $b + c = \frac{2\varrho(2 - \cos\alpha)}{\sin\alpha}$, $e^2 = 4\varrho^2 + b^2 = \frac{4\varrho^2(1 + \sin\alpha^2)}{\sin\alpha^2}$, $r^2 = \frac{e^2}{4\sin\alpha^2} = \frac{\varrho^2(1 + \sin\alpha^2)}{\sin\alpha^4}$, $F = 2b\varrho = \frac{4\varrho^2}{\sin\alpha}$. Sind ϱ und α beide nicht gegeben, so liefern die beiden gegebenen Stücke zwei Gleichungen, aus denen man ϱ und α suchen kann. Ist eine der Größen ϱ und α gegeben, die andere also unbekannt, so liefert das außerdem noch gegebene Stück eine Gleichung, welche zur Bestimmung der Unbekannten dient. Zuweilen empfiehlt es sich, ein anderes Stück, als ϱ und α direct zu berechnen. So ist es z. B. häufig von Vortheil, mittelst der Gleichung $\sin\alpha = \operatorname{tg}\beta'$ den Winkel β' statt α einzuführen. Auch die Gleichungen $4\varrho^2 = ac$, $2b = a + c$ lassen sich vortheilhaft anwenden.

1. a, ϱ. 2. a, α. 3. a, β'. 4. F, α. 5. F, β'.

6. a, c. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha = \sqrt{\frac{c}{a}}$, $\varrho = {}^1/_2\sqrt{ac}$.

7. a, b. Aufl. $\cos {}^1/_2\alpha = \sqrt{\frac{a}{2b}}$.

8. $a - c, e$. Aufl. $\varrho = \frac{\sqrt{4e^2 - (a-c)^2}}{4\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{4e^2 - (a-c)^2}}{\sqrt{2}(a-c)}$.

9. a, e. 1. Aufl. $b^2 + 2ab - (a^2 + e^2) = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta'^2 + \frac{2a}{e}\cos\beta' - \left(1 + \frac{a^2}{e^2}\right) = 0$.

10. F, e. 1. Aufl. $\sin\alpha^2 - \frac{e^2}{F}\sin\alpha + 1 = 0$. 2. Aufl. $\sin 2\beta' = \frac{2F}{e^2}$.

11. ϱ, r. 1. Aufl. $\sin\alpha^4 - \frac{\varrho^2}{r^2}\sin\alpha^2 - \frac{\varrho^2}{r^2} = 0$. 2. Aufl. $\cos\beta'^2 + \frac{\rho}{r}\cos\beta' - 1 = 0$.

12. $a - c = d$, r. Aufl. $\sin\alpha^4 - \frac{16 r^2 - d^2}{16 r^2}\sin\alpha^2 + \frac{d^2}{16 r^2} = 0$.

13. F, $a - c = d$. Aufl. $\sin\alpha^2 + \frac{d^2}{4 F}\sin\alpha - 1 = 0$.

14. $a + b = s$, ϱ. Aufl. $s\sin\alpha - 2\varrho\cos\alpha = 4\varrho$ (§. 3, 1).

15. $a + b$, α.

16. $a + b = s$, e. Aufl. $\cos\alpha^2 + \frac{4 e^2}{s^2 + e^2}\cos\alpha - \frac{2 s^2 - 4 e^2}{s^2 + e^2} = 0$.

Ist α' gegeben, so führt die Bestimmung von α auf eine höhere Gleichung, die nur für den Fall $\alpha' = \frac{1}{2}\pi$ die einfache Form $\cos\alpha^2 + \cos\alpha - 1 = 0$ annimmt. Die Seiten des Dreiecks ABC bilden, beiläufig bemerkt, eine stetige Proportion. Gegeben ist $\alpha' = \frac{1}{2}\pi$ und außerdem:

17. ϱ	19. b	21. e	23. $a - c$	25. F.
18. a	20. c	22. r	24. $a + b$	

§. 30.

Aufgaben über das Parallelogramm.

a) Die folgenden Aufgaben lassen sich unmittelbar auf Dreiecksaufgaben zurückführen, in denen die gegebenen Stücke Dreieckswinkel, Seiten, Höhen oder Inhalt, oder auch Aggregate aus solchen sind.

1. a, $e + f$, ε (§. 14, 51)
2. a, $e - f$, ε (§. 14, 53)
3. $a + b$, e, α (§. 14, 51)
4. $a - b$, e, α (§. 14, 53)
5. a, $e + f$, β' (§. 14, 70)
6. a, $e - f$, β' (§. 14, 71)
7. $a + b$, e, α'' (§. 14, 70)
8. $a - b$, e, α'' (§. 14, 71)
9. $a + b$, α'', β' (§. 14, 1)
10. $a - b$, α'', β' (§. 14, 2)
11. $e + f$, α', α'' (§. 14, 1)
12. $e - f$, α', α'' (§. 14, 2)
13. $h_b + h_a$, α'', β' (§. 14, 5)
14. $h_b - h_a$, α'', β' (§. 14, 6)
15. a, h_a, α' (§. 14, 65)
16. a, h_a, ε (§. 14, 65)
17. a, h_a, $\beta'' - \beta'$ (§. 14, 66)
18. e, f, $\beta'' - \beta'$ (§. 14, 78)
19. a, b, $\alpha' - \beta''$ (§. 14, 78)
20. a, $e + f$, $\beta'' - \beta'$ (§. 14, 52)
21. a, $e - f$, $\beta'' - \beta'$ (§. 14, 54)
22. f, $a + b$, $\alpha' - \beta''$ (§. 14, 52)
23. f, $a - b$, $\alpha' - \beta''$ (§. 14, 54)
24. $a^2 - b^2$, α', β'' (§. 14, 12)
25. ab, α', β'' (§. 14, 14)
26. $e^2 - f^2$, α', α'' (§. 14, 12)
27. ef, α', α'' (§. 14, 14)
28. F, e, α (§. 14, 68)

29. F, a, ε (§. 14, 68)
30. F, h_a, ε (§. 14, 184)
31. F, b, β' (§. 14, 68)
32. F, h_b, β' (§. 14, 184)
33. F, f, β' (§. 14, 68)
34. $F, a, e + f$ (§. 14, 454)
35. $F, a, e - f$ (§. 14, 456)
36. $F, h_a, e + f$ (§. 14, 487)
37. $F, h_a, e - f$ (§. 14, 519)
38. $F, e, a + b$ (§. 14, 454)
39. $F, e, a - b$ (§. 14, 456).

40. $F, a + b, \alpha$ (§. 14, 94) oder $ab = \frac{F}{\sin\alpha}$ (§. 10).
41. $F, a - b, \alpha$ (§. 14, 122) oder wie 40.
42. $F, e + f, \varepsilon$. Wie 40.
43. $F, e - f, \varepsilon$. Wie 41.
44. $F, h_b + h_a, \alpha$ (§. 14, 212) oder $h_b h_a = F \sin\alpha$ (§. 10).
45. $F, h_b - h_a, \alpha$ (§. 14, 224) oder wie 44.
46. $F, a + b, h_b + h_a$. $\sin\alpha = \frac{h_b + h_a}{a + b}$ (40).
47. $F, a - b, h_b - h_a$. $\sin\alpha = \frac{h_b - h_a}{a - b}$ (41).

b) Die sechs Winkel $\alpha, \varepsilon, \alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ sind sämmtlich bestimmt, wenn man zwei von ihnen kennt. Es bestehen unter ihnen die Gleichungen $\alpha' + \alpha'' = \varepsilon$ (I), $\beta' + \beta'' = \pi - \varepsilon$ (II), $\alpha'' + \beta' = \alpha$ (III), $\alpha' + \beta'' = \pi - \alpha$ (IV), $\alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' = \pi$ (V), von denen aber (II) und (IV) eine Folge der anderen sind, so daß wir in der That bis jetzt nur 3 Gleichungen zwischen den Winkeln haben. Eine vierte ergiebt sich, wenn man beachtet, daß nach dem Sinussatz $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$ und $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta''}$; also $\frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta''}$ (VI) ist.

Aus diesen vier Gleichungen kann man stets vier unbekannte Winkel berechnen. Es treten dabei vier verschiedene Fälle ein.

1. Gegeben sei α' und α''. Dann ist nach (VI) und (II) $\frac{\sin\beta'}{\sin\beta''} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'}$ und $\beta' + \beta'' = \pi - (\alpha' + \alpha'')$, also β' und β'' nach §. 7, 1 zu berechnen.

2. Gegeben sei α'' und β'. Nach (VI) und (IV) ist $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta''} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$ und $\alpha' + \beta'' = \pi - (\alpha'' + \beta')$, also α' und β'' zu berechnen nach §. 7, 1.

3. Gegeben sei α' und β'. Nach (VI) und (V) ist $\sin\alpha'' \sin\beta'' = \sin\alpha' \sin\beta'$ und $\alpha'' + \beta'' = \pi - (\alpha' + \beta')$, mithin α'' und β'' nach §. 6, 1 zu berechnen.

4. Gegeben sei α und ε. Aus (VI) erhält man auf bekannte Weise $\frac{\sin\alpha' + \sin\alpha''}{\sin\alpha' - \sin\alpha''} = \frac{\sin\beta'' + \sin\beta'}{\sin\beta'' - \sin\beta'}$, woraus unter Berücksichtigung von (I) und (II) sich $\operatorname{tg}{}^1/_2\,\varepsilon^2 = \operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha' - \alpha'')\cot{}^1/_2(\beta'' - \beta')$ ergiebt. Hieraus folgt $\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2\,\varepsilon^2 - 1}{\operatorname{tg}{}^1/_2\,\varepsilon^2 + 1} = \frac{\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha' - \alpha'')\cot{}^1/_2(\beta'' - \beta') - 1}{\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha' - \alpha'')\cot{}^1/_2(\beta'' - \beta') + 1}$ $= \frac{\sin{}^1/_2(\alpha' - \alpha'')\cos{}^1/_2(\beta'' - \beta') - \cos{}^1/_2(\alpha' - \alpha'')\sin{}^1/_2(\beta'' - \beta')}{\sin{}^1/_2(\alpha' - \alpha'')\cos{}^1/_2(\beta'' - \beta') + \cos{}^1/_2(\alpha' - \alpha'')\sin{}^1/_2(\beta'' - \beta')}$ $= \frac{\sin{}^1/_2(\alpha' - \alpha'' + \beta' - \beta'')}{\sin{}^1/_2(\alpha' + \beta'' - \alpha'' - \beta')} = \frac{\sin{}^1/_2(\alpha' - \alpha'' + \beta' - \beta'')}{\sin{}^1/_2(\pi - 2\,\alpha)}$, also schließlich, da die linke Seite gleich $-\cos\varepsilon$ ist, $\sin{}^1/_2(\alpha' - \alpha'' + \beta' - \beta'') = -\cos\alpha\cos\varepsilon$ (VII). Aus dieser Gleichung findet man ${}^1/_2(\alpha' - \alpha'' + \beta' - \beta'')$, und da ${}^1/_2(\alpha' - \alpha'' - \beta' + \beta'') = {}^1/_2(\pi - 2\,\alpha) = {}^1/_2\pi - \alpha$ ist, so findet man $\alpha' - \alpha''$ und $\beta'' - \beta'$, endlich mit Zuhülfenahme von (I) und (II) α', β', α'', β''.

48. f, α'', β'
49. $e + f, \alpha'', \beta'$
50. $e - f, \alpha'', \beta'$
51. $e^2 - f^2, \alpha'', \beta'$
52. ef, α'', β'
53. a, α', α''
54. h_a, α', α''
55. $a + b, \alpha', \alpha''$
56. $a - b, \alpha', \alpha''$
57. $h_b + h_a, \alpha', \alpha''$
58. $h_b - h_a, \alpha', \alpha''$
59. $a^2 - b^2, \alpha', \alpha''$
59a. ab, α', α''
60. a, α', β'
60a. h_a, α', β'
61. e, α', β'
62. $a + b, \alpha', \beta'$
63. $a - b, \alpha', \beta'$
64. $e + f, \alpha', \beta'$
65. $e - f, \alpha', \beta'$
66. $h_b + h_a, \alpha', \beta'$
67. $h_b - h_a, \alpha', \beta'$
68. $a^2 - b^2, \alpha', \beta'$
69. ab, α', β'
70. $e^2 - f^2, \alpha', \beta'$
71. ef, α', β'
72. F, α', β'
73. e, h_a, α'
74. a, α, ε
75. e, α, ε
76. h_a, α, ε.

77. $a + b, \alpha, \varepsilon$. 1. Aufl. Nach der Berechnung der Winkel liefert der Tangentialsatz die Gleichung $a - b = (a + b)\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha' - \beta'')\operatorname{tg}{}^1/_2\,\alpha$ oder $a - b = (a + b)\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha'' - \beta')\cot{}^1/_2\,\alpha$. 2. Aufl. Wendet man auf die Dreiecke ABE und ADE den Projectionssatz an und berücksichtigt, daß der Inhalt ${}^1/_8\,ef\sin\varepsilon$ des Dreiecks ABE gleich der Hälfte des Inhalts ${}^1/_2\,ab\sin\alpha$ des Dreiecks ABD ist, so erhält man die Gleichungen $4\,a^2 = e^2 + f^2 - 2\,ef\cos\varepsilon$ (α), $4\,b^2 = e^2 + f^2 + 2\,ef\cos\varepsilon$ (β), $2\,ab\sin\alpha = ef\sin\varepsilon$ (γ), $a + b = s$ (δ). Um auf geschickte Weise a und b aus denselben zu berechnen, substituire man $a = r\cos\varphi$ (ε), $b = r\sin\varphi$ (ζ). Durch Subtraction von (α) und (β) erhält man, wenn man ef mittelst (γ) eliminirt und für a und b die Werthe (ε) und (ζ) einsetzt, $4\,r^2\cos 2\,\varphi = -4\,r^2\sin 2\,\varphi\cot\varepsilon\sin\alpha$, mithin $\cot 2\varphi = -\sin\alpha\cot\varepsilon$ (η), woraus φ zu berechnen ist. Aus (δ) findet man

dann $r = \frac{s}{\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{s}{\sqrt{2}\sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi)}$, mithin aus ($\varepsilon$) und

(ζ) $a = \frac{s\cos\varphi}{\sqrt{2}\sin(\frac{1}{4}\pi+\varphi)}$, $b = \frac{s\sin\varphi}{\sqrt{2}\sin(\frac{1}{4}\pi+\varphi)}$.

78. $a - b, \alpha, \varepsilon$. Aehnlich wie 77.

79. $e + f, \alpha, \varepsilon$. 1. Aufl. Nach Berechnung der Winkel liefern die Gauß'schen Gleichungen $a = \frac{(e+f)\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\frac{1}{2}(\beta''-\beta')}$, $b = \frac{(e+f)\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha'')}$. 2. Aufl. Man benutze dieselben Gleichungen und Substitutionen wie in 77, 2. Aufl., nur daß $e + f = s$ an die Stelle von (δ) tritt. Man erhält ebenso wie oben $\cot 2\varphi = -\sin\alpha\cot\varepsilon$ (η). Durch Addition von (α) und (β) erhält man $2r^2 = e^2 + f^2 = s^2 - 2ef$, oder wenn man ($\gamma$), ($\varepsilon$), ($\zeta$) benutzt, $r = \frac{s}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{\sin 2\varphi\sin\alpha}{\sin\varepsilon}}}$. Setzt man $\cot\mu = \sqrt{\frac{\sin 2\varphi\sin\alpha}{\sin\varepsilon}}$ (ϑ), so erhält man $r = \frac{s\sin\mu}{\sqrt{2}}$, mithin findet man nach Berechnung von φ und μ aus (η) und (ϑ) $a = \frac{s\sin\mu\cos\varphi}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{s\sin\mu\sin\varphi}{\sqrt{2}}$.

80. $e - f, \alpha, \varepsilon$. Aehnlich wie 79.

81. $h_b + h_a, \alpha, \varepsilon$. Aufl. $a + b = \frac{h_b + h_a}{\sin\alpha}$ (77).

82. $h_b - h_a, \alpha, \varepsilon$. Aufl. $a - b = \frac{h_b - h_a}{\sin\alpha}$ (78).

83. F, α, ε. 1. Aufl. Nach Berechnung der Winkel zurückgeführt auf §. 22, 48 oder 49. 2. Aufl. Aehnlich wie in 77, 2. Aufl., erhält man $e^2 + f^2 - 2ef\cos\varepsilon = 4a^2$ (α); $e^2 + f^2 + 2ef\cos\varepsilon = 4b^2$ (β); $ab\sin\alpha = F$ (γ); $ef\sin\varepsilon = 2F$ (δ). Setzt man $a = r\cos\varphi$ (ε), $b = r\sin\varphi$ (ζ), $e = r'\cos\psi$ (η), $f = r'\sin\psi$ (ϑ), so erhält man durch Addition von (α) und (β) $r'^2 = 2r^2$ (ι). Mit Hülfe dieser Gleichung gehen (γ) und (δ) über in $r^2\sin 2\varphi\sin\alpha = 2F$ ($\varkappa$), $r^2\sin 2\psi\sin\varepsilon = 2F$ (λ), woraus $\sin 2\varphi\sin\alpha = \sin 2\psi\sin\varepsilon$ (μ) folgt. Ferner erhält man durch Subtraction von (α) und (β) mit Berücksichtigung von (ι) $-\sin 2\psi\cos\varepsilon = \cos 2\varphi$ (ν), und durch Division von (ν) und (μ) $\cot 2\varphi = -\sin\alpha\cot\varepsilon$ (o), woraus φ zu berechnen. Für r findet man aus ($\varkappa$) $r = \sqrt{\frac{2F}{\sin 2\varphi\sin\alpha}}$,

und mit Hülfe von (ε) und (ζ) $a = \sqrt{\frac{F \cot \varphi}{\sin \alpha}}$, $b = \sqrt{\frac{F \operatorname{tg} \varphi}{\sin \alpha}}$. Will man e und f berechnen, so geschieht es mittelst (η) und (ϑ), nachdem man vorher $\sin 2\psi$ aus (ν) berechnet hat.

84. $a^2 - b^2, \alpha, \varepsilon$.

85. $e^2 - f^2, \alpha, \varepsilon$.

86. $a + b, h_b + h_a, \varepsilon$. Aufl. $\sin \alpha = \frac{h_b + h_a}{a + b}$ (77).

87. $a - b, h_b - h_a, \varepsilon$. Aufl. $\sin \alpha = \frac{h_b - h_a}{a - b}$ (78).

c) Bei der Herleitung in b), 4 waren wir auf die Gleichung $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon^2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha'') \cot \frac{1}{2} (\beta'' - \beta')$ gekommen, welche ε finden lehrt, wenn $\alpha' - \alpha''$ und $\beta'' - \beta'$ gegeben sind. Da $\alpha' + \alpha'' = \varepsilon$, $\beta' + \beta'' = \pi - \varepsilon$, so findet man auch $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$. Auf ganz ähnliche Weise leitet man die Gleichung $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha^2 = \cot \frac{1}{2} (\alpha' - \beta'') \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha'' - \beta')$ her, welche aus $\alpha' - \beta''$ und $\alpha'' - \beta'$ zunächst α und dann die übrigen Winkel finden lehrt.

88. $a, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
89. $h_a, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
90. $e, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
91. $F, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
92. $a + b, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
93. $a - b, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
94. $e + f, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
95. $e - f, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
96. $h_b + h_a, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
97. $h_b - h_a, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
98. $a^2 - b^2, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
99. $e^2 - f^2, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
100. $ab, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
101. $ef, \alpha' - \alpha'', \beta'' - \beta'$
102. $a, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
103. $h_a, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
104. $e, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
105. $F, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
106. $a + b, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
107. $a - b, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
108. $e + f, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
109. $e - f, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
110. $h_b + h_a, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
111. $h_b - h_a, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
112. $a^2 - b^2, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
113. $e^2 - f^2, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
114. $ab, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$
115. $ef, \alpha' - \beta'', \alpha'' - \beta'$.

d) Ist einer der Winkel α oder ε gegeben, so kommen im ersteren Falle die Gleichungen $a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha = e^2$ (I), $a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = f^2$ (II), $ab \sin \alpha = F$ (III), im letzteren $e^2 + f^2 - 2ef \cos \varepsilon = 4a^2$ (IV), $e^2 + f^2 + 2ef \cos \varepsilon = 4b^2$ (V), $ef \sin \varepsilon = 2F$ (VI) zur Anwendung. Aus (III) und (VI) folgt auch $2ab \sin \alpha = ef \sin \varepsilon$ (VII). Der Kürze wegen wollen wir stets $a + b = s$, $a - b = d$, $e + f = s'$, $e - f = d'$ setzen. Ist s oder d und α gegeben, so drücke man in (I), (II) und (III) $a^2 + b^2$ und ab durch s und d aus; man erhält dadurch $s^2 \cos \frac{1}{2}\alpha^2 + d^2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2 = e^2$ (VIII), $s^2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2 + d^2 \cos \frac{1}{2}\alpha^2 = f^2$ (IX),

$(s^2 - d^2) \sin\alpha = 4F$ (X). Ist außerdem noch s' oder d' gegeben, so addire und subtrahire man (VIII) und (IX) und drücke $e^2 + f^2$ und $e^2 - f^2$ durch s' und d' aus. Dann ergiebt sich $2s^2 + 2d^2 = s'^2 + d'^2$ (XI) und $(s^2 - d^2)\cos\alpha = s'd'$ (XII). Auf ähnliche Weise leitet man für den Fall, daß ε gegeben ist, aus (IV), (V), (VI) die Gleichungen: $s'^2 \sin {}^1/_2\varepsilon^2 + d'^2 \cos {}^1/_2\varepsilon^2 = 4a^2$ (XIII), $s'^2 \cos {}^1/_2\varepsilon^2 + d'^2 \sin {}^1/_2\varepsilon^2 = 4b^2$ (XIV), $(s'^2 - d'^2)\sin\varepsilon = 8F$ (XV), $(s'^2 - d'^2)\cos\varepsilon = -4sd$ (XVI). Aus (X) und (XV) folgt noch $2(s^2 - d^2)\sin\alpha = (s'^2 - d'^2)\sin\varepsilon$ (XVII).

116. a, b, ε. Aufl. (I), (II), (V), (VII). $\sin\alpha = -\frac{(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\varepsilon}{2ab} = \frac{(a^2 - b^2)\operatorname{tg}(\pi - \varepsilon)}{2ab}$ (74).

117. e, f, α. 1. Aufl. (I), (II), (VII). $\sin\varepsilon = \frac{(e^2 - f^2)\operatorname{tg}\alpha}{2ef}$; zurückgeführt auf 75 oder §. 22, 26. 2. Aufl. Man erhält aus (VIII) und (IX) $s^2 = \frac{e^2\cos {}^1/_2\alpha^2 - f^2\sin {}^1/_2\alpha^2}{\cos\alpha}$, $d^2 = \frac{f^2\cos {}^1/_2\alpha^2 - e^2\sin {}^1/_2\alpha^2}{\cos\alpha}$. Setzt man, nachdem man e als Factor ausgezogen, $\frac{f}{e} = \cot\varphi$, so findet man $s = \frac{e}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{\sin(\varphi + {}^1/_2\alpha)\sin(\varphi - {}^1/_2\alpha)}{\cos\alpha}}$, $d = \frac{e}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{\cos(\varphi + {}^1/_2\alpha)\cos(\varphi - {}^1/_2\alpha)}{\cos\alpha}}$. 3. Aufl. Setzt man in (I) und (II) $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, so erhält man durch Addition $r^2 = \frac{e^2 + f^2}{2}$, und durch Subtraction $\sin 2\varphi = \frac{e^2 - f^2}{2r^2\cos\alpha}$, so daß man nacheinander r, φ, a, b berechnen kann.

118. e + f, F, α. Aufl. (X) und (XII). $d' = \frac{4F\cot\alpha}{s'}$.

119. e — f, F, α. Aufl. (X), (XII). $s' = \frac{4F\cot\alpha}{d'}$.

120. a + b, F, ε. Aufl. (XV), (XVI). $d = \frac{2F\cot(\pi - \varepsilon)}{s}$.

121. a — b, F, ε. Aufl. (XV), (XVI). $s = \frac{2F\cot(\pi - \varepsilon)}{d}$.

122. a + b, e, ε. Aufl. Addire und subtrahire (IV) und (V) und eliminire f aus den erhaltenen Gleichungen. $d = \frac{e\cos\varepsilon\sqrt{s^2 - e^2}}{\sqrt{s^2 - e^2\cos\varepsilon^2}}$.

123. a — b, c, ε. Aehnlich wie 122.
124. e + f, a, α. Aehnlich wie 122 mit Hülfe von (I) und (II).
125. e — f, a, α. Aehnlich wie 122.
126. a + b, e + f, ε. 1. Aufl. (XI), (XVI). $d^2 - \frac{2s}{\cos\varepsilon} \cdot d - (s'^2 - s^2) = 0$. 2. Aufl. Setzt man in (IV) und (V) $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$; $e = r'\cos\psi$, $f = r'\sin\psi$, so erhält man durch Addition und Subtraction die beiden Gleichungen $r'^2 = 2r^2$, $-r'^2 \sin 2\psi \cos\varepsilon = 2r^2\cos 2\varphi$, zu denen noch $s^2 = r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 = r^2(1 + \sin 2\varphi)$ und $s'^2 = r'^2(\cos\psi + \sin\psi)^2 = r'^2(1 + \sin 2\psi)$ hinzutreten. Durch Elimination von r, r', ψ erhält man aus den vier Gleichungen zur Bestimmung von φ die Gleichung $2s^2\cos 2\varphi + s'^2\cos\varepsilon\sin 2\varphi = (2s^2 - s'^2)\cos\varepsilon$ (§. 3, 1). Für r findet man $r = \frac{s}{\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{s}{\sqrt{2}\cos(\frac{1}{4}\pi - \varphi)}$; daher $a = \frac{s\cos\varphi}{\sqrt{2}\cos(\frac{1}{4}\pi - \varphi)}$, $b = \frac{s\sin\varphi}{\sqrt{2}\cos(\frac{1}{4}\pi - \varphi)}$.
127. a — b, e — f, ε. 1. Aufl. (XI), (XVI). $s^2 + \frac{2d}{\cos\varepsilon} \cdot s - (d'^2 - d^2) = 0$. 2. Aufl. ähnlich wie 126, 2. Aufl.
128. a + b, e — f, ε. 1. Aufl. (XI), (XVI). $d^2 + \frac{2s}{\cos\varepsilon} \cdot d + s^2 - d'^2 = 0$. 2. Aufl. wie 126, 2. Aufl.
129. a — b, e + f, ε. 1. Aufl. (XI), (XVI). $s^2 - \frac{2d}{\cos\varepsilon} \cdot s - (s'^2 - d^2) = 0$. 2. Aufl. ähnlich wie 126, 2. Aufl.
130. a + b, e + f, α. 1. Aufl. (XI), (XII). $d'^2 + \frac{2s'}{\cos\alpha} \cdot d' - (4s^2 - s'^2) = 0$, dann wie 3. 2. Aufl. Aus (I) und (II) findet man durch die Substitutionen $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, $e = r'\cos\psi$, $f = r'\sin\psi$ ähnlich wie in 126, 2. Aufl., zur Bestimmung von ψ, φ, a, b die Gleichungen $2s^2\cos\alpha \cdot \sin 2\psi - s'^2\cos 2\psi = (s'^2 - 2s^2)\cos\alpha$, $\sin 2\varphi = \frac{\cos 2\psi}{\cos\alpha}$, $a = \frac{s'\cos\varphi}{2\cos(\frac{1}{4}\pi - \psi)}$, $b = \frac{s'\sin\varphi}{2\cos(\frac{1}{4}\pi - \psi)}$.
131. a — b, e — f, α. 1. Aufl. (XI), (XII). $s'^2 - \frac{2d'}{\cos\alpha} \cdot s' - (4d^2 - d'^2) = 0$, dann wie 4. 2. Aufl. wie 130, 2. Aufl.

132. $a + b$, $e - f$, α. 1. Aufl. (XI), (XII). $s'^2 + \frac{2d'}{\cos\alpha} \cdot s' - (4s^2 - d'^2) = 0$, dann wie 3. 2. Aufl. ähnlich wie 130, 2. Aufl.

133. $a - b$, $e + f$, α. 1. Aufl. (XI), (XII). $d'^2 - \frac{2s'}{\cos\alpha} \cdot d' + s'^2 - 4d^2 = 0$, dann wie 4. 2. Aufl. ähnlich wie 130, 2. Aufl.

134. $e + f$, $h_b + h_a$, α. Aufl. $a + b = \frac{h_b + h_a}{\sin\alpha}$, und dadurch wie 130.

135. $e - f$, $h_b + h_a$, α (132). 136. $e + f$, $h_b - h_a$, α (133).

137. $e - f$, $h_b - h_a$, α (131).

138. $a^2 - b^2 = D^2$, $e^2 - f^2 = D'^2$, α. Aufl. Es ist $sd = D^2$ und nach (XII) $s^2 - d^2 = \frac{D'^2}{\cos\alpha}$ (§. 10).

139. $a^2 - b^2 = D^2$, $e^2 - f^2 = D'^2$, ε. Aufl. Es ist $s'd' = D'^2$ und nach (XVI) $s'^2 - d'^2 = -\frac{4D^2}{\cos\varepsilon}$, dann wie in 138.

e) Ist kein Winkel gegeben, so suche man zunächst α oder ε zu bestimmen. In Betreff der Bezeichnungen vergleiche d).

140. a, b, $e + f$. Aufl. Aus d), (XIII), (XIV) findet man $\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varepsilon = \sqrt{\frac{4b^2 - s'^2}{4a^2 - s'^2}}$, dann wie 1.

141. a, b, $e - f$. Aufl. Aus d), (XIII), (XIV) findet man $\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\varepsilon = \sqrt{\frac{4a^2 - d'^2}{4b^2 - d'^2}}$, dann wie 2.

142. e, f, $a + b$. Aufl. d), (VIII), (IX). $\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{s^2 - e^2}{s^2 - f^2}}$, dann wie 3.

143. e, f, $a - b$. Aufl. d), (VIII), (IX). $\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{f^2 - d^2}{e^2 - d^2}}$, dann wie 4.

144. a, b, $ef = q^2$. Aufl. Aus d), (IV), (V) findet man $\cos(\pi - \varepsilon) = \frac{a^2 - b^2}{q^2}$, aus (VII) $\sin\alpha = \frac{q^2 \sin\varepsilon}{2ab}$.

145. e, f, $ab = q^2$. Aufl. Aus d), (I) und (II) findet man $\cos\alpha = \frac{e^2 - f^2}{4q^2}$, aus (VII) $\sin\varepsilon = \frac{2q^2 \sin\alpha}{ef}$.

146. F, $a + b$, $e + f$. Aufl. Durch Elimination von d und d' aus d), (X), (XI), (XII) erhält man $((4s^2 - s'^2)s'^2 + 16F^2) \sin\alpha^2 - 8Fs'^2 \sin\alpha - 16F^2 = 0$. Zieht man im ersten Gliede

16 F^2 als Factor aus und substituirt $\frac{s'\sqrt{4s^2 - s'^2}}{4F} = \operatorname{tg}\varphi$, so erhält man $\sin\alpha^2 - \frac{s^2\cos\varphi^2}{2F} \cdot \sin\alpha - \cos\varphi^2 = 0$. a und b findet man aus $a + b = s$ und $ab = \frac{F}{\sin\alpha}$ (§. 10).

147. $a - b$, $e - f$, F. Aufl. Aehnlich wie in 146 findet man $((4d^2 - d'^2)d'^2 + 16F^2)\sin\alpha^2 + 8Fd'^2\sin\alpha - 16F^2 = 0$. Da $4d^2 - d'^2$ positiv und negativ sein kann, so ist eine der vorigen analoge Substitution hier allgemein nicht anwendbar. Setzt man, nachdem $16F^2$ im ersten Gliede als Factor ausgezogen ist, $\frac{(4d^2 - d'^2)d'^2}{16F^2} = \cos\psi$, so erhält man $\sin\alpha^2 + \frac{d'^2}{4F\cos{}^1/_2\psi^2}$ $\sin\alpha - \frac{1}{2\cos{}^1/_2\psi^2} = 0$. Endlich findet man a und b aus $a - b = d$, $ab = \frac{F}{\sin\alpha}$.

148. $a + b$, $e - f$, F. Aehnlich wie 146.

149. $a - b$, $e + f$, F. Aehnlich wie 146.

§. 31.

Aufgaben über das Antiparallelogramm.

In allen Fällen gelangt man sicher zu einer Auflösung, wenn man sämmtliche Stücke durch drei derselben, etwa a, c, α ausdrückt. Man findet so $b = \frac{a - c}{2\cos\alpha}$, $h = {}^1/_2(a - c)\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta' = \frac{(a - c)\operatorname{tg}\alpha}{a + c}$, $\operatorname{tg}\alpha' = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta') = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta'}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta'} = -\frac{a\sin 2\alpha}{a\cos 2\alpha + c}$, $\operatorname{tg}\gamma' = \operatorname{tg}(\alpha - \beta') = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta'}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta'} = \frac{c\sin 2\alpha}{a + c\cos 2\alpha}$, $e^2 = {}^1/_4(a + c)^2 + h^2 = {}^1/_4(a + c)^2 + {}^1/_4(a - c)^2\operatorname{tg}\alpha^2$ $= \frac{(a + c)^2\cos\alpha^2 + (a - c)^2\sin\alpha^2}{4\cos\alpha^2}$, $2b + c = \frac{a - c}{\cos\alpha} + c$, $a + 2b + c = \frac{(a + c)\cos\alpha + a - c}{\cos\alpha}$, $F = {}^1/_2(a + c)h =$ ${}^1/_4(a^2 - c^2)\operatorname{tg}\alpha$. Die gegebenen Stücke liefern die nöthige Anzahl von Gleichungen, um a, c, α, soweit sie nicht schon bekannt sind, zu bestimmen. Häufig ist es von Vortheil, $a + c$ und $a - c$ anstatt a und c in die Gleichungen einzuführen und zu bestimmen. Wenn r

gegeben ist, beachte man $a = 2r\sin\alpha'$, $b = 2r\sin\beta'$, $c = 2r\sin\gamma'$, $e = 2r\sin\alpha$.

1. $a + 2b + c = u$, h, α. Aufl. $a - c = 2h\cot\alpha$, $a + c = u - \frac{2h}{\sin\alpha}$.

2. $a + 2b + c = u$, $a - c = d$, α. Aufl. $a + c = u - \frac{d}{\cos\alpha}$.

3. $a + 2b + c = u$, $a - c = d$, β'. Aufl. $u\cos\alpha - d\cot\beta' \sin\alpha = d$ (§. 3, 1).

4. $a + 2b + c = u$, h, $a - c = d$. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2d}$, $a + c = u - \frac{d}{\cos\alpha}$.

5. a, $2b + c = s$, β'. Aufl. $(s - a)\sin\alpha + (s + a)\operatorname{tg}\beta' \cos\alpha = 2a\operatorname{tg}\beta'$ (§. 3, 1).

6. a, $2b + c = s$, α. Aufl. $a - c = \frac{(s - a)\cos\alpha}{2\sin{}^1/_2\alpha^2}$.

7. a, $2b + c = s$, h. Aufl. $(s - a)\sin\alpha + 2h\cos\alpha = 2h$ (§. 3, 1).

8. F, a, α. Aufl. $c = \sqrt{a^2 - 4F\cot\alpha}$.

9. F, a, β'. Aufl. $a + c = 2\sqrt{F\cot\beta'}$.

10. F, α, β'. Aufl. $a + c = 2\sqrt{F\cot\beta'}$, $a - c = 2\cot\alpha\sqrt{F\operatorname{tg}\beta'}$.

11. F, b, β'. Aufl. $a + c = 2\sqrt{F\cot\beta'}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{F\operatorname{tg}\beta'}}{b}$.

12. F, r, β' (11). 13. F, b, r (11).

14. F, $a - c$, β'. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{F\operatorname{tg}\beta'}}{a - c}$.

15. F, $a + 2b + c = u$, α. Aufl. Man erhält die Gleichungen $(a + c)\cos\alpha + a - c = u\cos\alpha$, $4F = (a + c)(a - c)\operatorname{tg}\alpha$. Die letztere läßt sich leicht auf die Form $(a + c)\cos\alpha \,.\, (a - c) = 4F\cot\alpha\cos\alpha$ bringen, und dann ist $(a + c)\cos\alpha$ und $a - c$ nach §. 10 zu berechnen.

16. $a + 2b + c = u$, e, α. Aufl. $2e\sin\beta' + 2e\sin\alpha\cos\beta' = u\sin\alpha$ (§. 3, 1).

17. $a + 2b + c = u$, e, r (16).

18. $a + 2b + c = u$, r, α (16).

Aus F und einem Stücke des Dreiecks AEC (CE ist eine Höhe) findet man alle übrigen Stücke desselben. Ist z. B. F und e gegeben, so ist zunächst $2F = (a + c)h$, und da $a + c = 2e\cos\beta'$, $h = e\sin\beta'$, so findet man $\sin 2\beta' = \frac{2F}{e^2}$.

19. F, e, α (10)
20. F, e, r (10)
21. F, e, b (11)
22. F, e, a (9)
23. F, e, a — c (14)
24. F, e, a + 2 b + c
25. F, a + 2b + c, β'
26. F, r, α (10)
27. F, r, β' (11)
28. F, b, r (11).

In den folgenden Aufgaben dienen die gegebenen Stücke zur Berechnung von △ ABC oder ACD. Die fehlenden Stücke findet man wie in §. 23.

29. a, h, α' (§. 14, 65).
30. a, h, γ' (§. 14, 66).
31. a, h, r (§. 14, 65).
32. r, h, α' (§. 14, 65).

§. 32.

Aufgaben über das Sehnentangentenviereck.

Die zu berechnenden Stücke sind die Seiten, die Winkel und der Inhalt F.

a) Sämmtliche Stücke lassen sich, und zwar meistentheils einfach, durch ϱ, α, β ausdrücken. Man findet leicht $a = \varrho\,(\cot {}^1\!/_2\alpha + \cot {}^1\!/_2\beta) = \frac{\varrho \sin {}^1\!/_2(\alpha+\beta)}{\sin {}^1\!/_2\alpha \sin {}^1\!/_2\beta}$, $b = \varrho\,(\cot {}^1\!/_2\beta + \operatorname{tg} {}^1\!/_2\alpha) = \frac{\varrho \cos {}^1\!/_2(\alpha-\beta)}{\cos {}^1\!/_2\alpha \sin {}^1\!/_2\beta}$, $c = \varrho\,(\operatorname{tg} {}^1\!/_2\alpha + \operatorname{tg} {}^1\!/_2\beta) = \frac{\varrho \sin {}^1\!/_2(\alpha+\beta)}{\cos {}^1\!/_2\alpha \cos {}^1\!/_2\beta}$, $d = \varrho\,(\operatorname{tg} {}^1\!/_2\beta + \cot {}^1\!/_2\alpha) = \frac{\varrho \cos {}^1\!/_2(\alpha-\beta)}{\sin {}^1\!/_2\alpha \cos {}^1\!/_2\beta}$, $e^2 = \frac{4\varrho^2(1+\sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha^2}$, $f^2 = \frac{4\varrho^2(1+\sin\alpha\sin\beta)}{\sin\beta^2}$, $r^2 = \frac{e^2}{4\sin\beta^2} = \frac{\varrho^2\,(1+\sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha^2\sin\beta^2}$, $a + c = b + d = \frac{2\varrho(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $a - c = \frac{2\varrho\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $b - d = \frac{2\varrho\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $a + b = \frac{2\varrho\,(1+\sin\alpha\cot {}^1\!/_2\beta)}{\sin\alpha}$, $a - b = d - c = \varrho\,(\cot {}^1\!/_2\alpha - \operatorname{tg} {}^1\!/_2\alpha) = 2\varrho\cot\alpha$, $a - d = b - c = 2\varrho\cot\beta$, $F = (a + c)\,\varrho = \frac{2\varrho^2(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $\sin\varepsilon = \frac{2F}{ef} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}$. Auch der später in c), 3 entwickelte Ausdruck $\operatorname{tg} {}^1\!/_2\varepsilon = \frac{\cos {}^1\!/_2(\alpha-\beta)}{\sin {}^1\!/_2(\alpha+\beta)}$, aus welchem der für $\sin\varepsilon$ sich ableiten läßt, kann zur Anwendung kommen. Die gegebenen Stücke liefern die nöthige Anzahl von Gleichungen, um ϱ, α, β, soweit sie nicht schon bekannt sind, zu bestimmen. Die übrigen zu suchenden Stücke kann man dann aus den vorstehenden Gleichungen berechnen. Ist r gegeben, so beachte man die Gleichungen $e = 2r\sin\beta$, $f = 2r\sin\alpha$, $a = 2r\sin\alpha'$ u. s. w.

Sind e und f gegeben, so kann man auch mit Vortheil die Gleichungen $ef = \frac{4\varrho^2(1+\sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, $\frac{e}{f} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ anwenden.

1. ϱ, α, β.

2. a, α, β. Aufl. $b = \frac{a \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha \cos {}^1/_2(\alpha-\beta)}{\sin {}^1/_2(\alpha+\beta)}$, $c = a \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha \operatorname{tg} {}^1/_2\beta$.

3. a, ϱ, α. Aufl. $\cot {}^1/_2\beta = \frac{a}{\varrho} - \cot {}^1/_2\alpha$.

4. e, ϱ, α. Aufl. $\sin\beta = \frac{e^2\sin\alpha^2 - 4\varrho^2}{4\varrho^2\sin\alpha}$.

5. f, ϱ, α. Aufl. $\sin\beta^2 - \frac{4\varrho^2\sin\alpha}{f^2}\sin\beta - \frac{4\varrho^2}{f^2} = 0$.

6. ϱ, r, α (5). 7. f, r, ϱ (5).

8. a, b, α. Aufl. $\cot {}^1/_2\beta = \left(\frac{(a+b)\cos\alpha}{a-b} - 1\right)\frac{1}{\sin\alpha}$.

9. a, c, α. Aufl. $\cot {}^1/_2\beta = \frac{a \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha}{c}$.

10. a, b, ϱ. Aufl. $\cot\alpha = \frac{a-b}{2\varrho}$, $\cot {}^1/_2\beta = \frac{a+b}{2\varrho} - \frac{1}{\sin\alpha}$.

11. a, c, ϱ. Aufl. $\cot {}^1/_2(\alpha+\beta) = \frac{(a-c)\varrho}{ac}$, $\cos {}^1/_2(\alpha-\beta) = \frac{(a+c)\varrho\sin {}^1/_2(\alpha+\beta)}{ac} = \frac{(a+c)\cos {}^1/_2(\alpha+\beta)}{a-c}$.

12. e, f, ϱ. Aufl. $\sin\alpha^2 = \frac{4\varrho^2 f}{e(ef-4\varrho^2)}$.

13. a, b, c. Aufl. Es ist $d = a + c - b$, ferner $\frac{a}{c} = \cot {}^1/_2\alpha \cot {}^1/_2\beta$, $\frac{b}{d} = \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha \cot {}^1/_2\beta$; daher $\cot {}^1/_2\alpha = \sqrt{\frac{ad}{bc}}$, $\cot {}^1/_2\beta = \sqrt{\frac{ab}{cd}}$,

$$\varrho = \frac{a}{\cot {}^1/_2\alpha + \cot {}^1/_2\beta} = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c}, \quad F = (a+c)\varrho = \sqrt{abcd}.$$

14. $a-b, \varrho, \beta$. Aufl. $\cot\alpha = \frac{a-b}{2\varrho}$.

15. $a-b, e, \varrho$ (4) 17. $a-b, r, \varrho$ (6) 19. $a-b, e, \alpha$ (4).
16. $a-b, f, \varrho$ (5) 18. $a-b, \alpha, \beta$ (1)

20. $a-b=g, f, \alpha$. Aufl. $\sin\beta^2 - \frac{g^2\operatorname{tg}\alpha^2\sin\alpha}{f^2}\sin\beta - \frac{g^2\operatorname{tg}\alpha^2}{f^2} = 0$.

21. $a-b=g, r, \alpha$. Aufl. $\sin\beta^2 - \frac{g^2\operatorname{tg}\alpha}{4r^2\cos\alpha}\sin\beta - \frac{g^2}{4r^2\cos\alpha^2} = 0$.

22. $a - b = g$, e, f. Aufl. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{f(e^2 - g^2)}{(f + e)g^2}}$.

23. $a - b$, f, r (20). 24. $a + c$, α, β [Vergl. c).]

25. $a + c$, ϱ, α.

26. $a + c = s$, e, f. Aufl. $\sin\alpha = \sqrt{\frac{e(e + f + s)(e + f - s)}{s^2 f}}$.

27. $a - c$, α, β. [Vergl. c)].

28. $a - c = g$, ϱ, α. Aufl. $\cot\beta = \frac{g}{2\varrho}\cot\alpha$.

29. $a - b = g$, $b - c = g'$, α. Aufl. $\varrho = \frac{1}{2} g \operatorname{tg}\alpha$, $\cot\beta = \frac{g' \cot\alpha}{g}$.

30. $a - b$, $b - c$, β (29). 31. $a - b$, b, $- c$, ϱ.

32. F, α, β. [Vergl. c)].

33. F, ϱ, α. Aufl. $\sin\beta = \frac{2\varrho^2 \sin\alpha}{F\sin\alpha - 2\varrho^2}$.

34. F, a, α. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta^2 - \left(\frac{F}{a^2}\cot\frac{1}{2}\alpha^2 - \cot\frac{1}{2}\alpha\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta - \frac{F\cot\frac{1}{2}\alpha}{a^2} = 0$. 2. Aufl. $(a^2\sin\frac{1}{2}\alpha + F\cos\frac{1}{2}\alpha)\cos\beta - \cot\frac{1}{2}\alpha(a^2\sin\frac{1}{2}\alpha - F\cos\frac{1}{2}\alpha)\sin\beta = a^2\sin\frac{1}{2}\alpha - F\cos\frac{1}{2}\alpha)$, woraus durch die Substitution $\frac{F}{a^2} = \operatorname{tg}\varphi$ die Gleichung $\sin(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)\cos\beta - \cot\frac{1}{2}\alpha\sin(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)\sin\beta = \sin(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)$ hervorgeht.

35. F, a, ϱ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{a(F - a\varrho)}{\varrho(2a\varrho - F)}$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{F\varrho\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{a(F - a\varrho)}$. Die Substitution $\frac{a\varrho}{F} = \cos\varphi^2$ liefert $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{a\sin\varphi^2}{\varrho\cos 2\varphi}$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\varrho\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{a\sin\varphi^2}$.

36. F, a, b. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{F}{ab}$.

37. F, a, c. Aufl. $\varrho = \frac{F}{a + c}$ (11).

38. F, $a + c$, α. Aufl. $\varrho = \frac{F}{a + c}$ (25).

39. F, $a - c = g$, ϱ. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{g}{4\varrho}\left(\frac{F^2}{g^2\varrho^2} - 1\right)$.

40. F, e, f. Aufl. $\sin\alpha^2 - \frac{f(e + f)}{2F}\sin\alpha + \frac{f}{e} = 0$.

41. F, e, r. Aufl. $\sin\alpha^2 + \frac{er - F}{2r^2} \sin\alpha - \frac{F}{er} = 0$.

42. F, e, β (41). 43. F, r, β (41).

44. F, e, α. Aufl. $\sin\beta^2 + \frac{2F - e^2 \sin\alpha}{2F \sin\alpha} \sin\beta - \frac{e^2 \sin\alpha}{2F} = 0$.

45. a + c, r, ϱ. Aufl. Aus $\sin\alpha^2 \sin\beta^2 - \frac{\varrho^2}{r^2} \sin\alpha \sin\beta - \frac{\varrho^2}{r^2} = 0$ berechnet man $\sin\alpha \sin\beta$; hierzu tritt noch $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{(a + c) \sin\alpha \sin\beta}{2\varrho}$ (§. 10).

46. F, r, ϱ (45). 47. F, r, a + c (45).

48. r, ϱ, a — c. Aufl. ähnlich wie 45.

49. a, ϱ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \cos \frac{1}{2} \sigma + \frac{2\varrho}{a} \sin \frac{1}{2} \sigma$ (§. 3, 2).

50. a, ϱ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $a \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + 2\varrho \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = a \cos \frac{1}{2} \tau$ (§. 3, 1).

51. a, c, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{(a + c) \cos \frac{1}{2} \sigma}{a - c}$.

52. a, c, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \frac{(a - c) \cos \frac{1}{2} \tau}{a + c}$.

53. $a + c = s$, ϱ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)^2 - \frac{4\varrho}{s} \sin \frac{1}{2} \sigma \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) - \cos \frac{1}{2} \sigma^2 = 0$.

54. a + c, ϱ, $\alpha - \beta$. Aufl. ähnlich wie 53.

55. $a - c = g$, ϱ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos (\alpha - \beta) = \cos\sigma + \frac{4\varrho}{g} \sin\sigma$ (§. 3, 2).

56. $a - c = g$, ϱ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $g \cos (\alpha + \beta) + 4\varrho \sin (\alpha + \beta) = g \cos\tau$ (§. 3, 1).

57. $a - b = g$, $a - d = g'$, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\frac{\cot\alpha}{\cot\beta} = \frac{g}{g'}$ (§. 6, 9).

58. a — b, a — d, $\alpha - \beta$ (wie 57, §. 6, 10).

59. F, ϱ, $\alpha + \beta$ (wie 53). 62. F, a + c, $\alpha - \beta$ (wie 54).

60. F, ϱ, $\alpha - \beta$ (wie 54). 63. r, ϱ, $\alpha + \beta$ (wie 45).

61. F, a + c, $\alpha + \beta$ (wie 53). 64. r, ϱ, $\alpha - \beta$ (wie 45).

65. r, ϱ, ε. Aufl. ähnlich wie 45.

66. $a^2 - c^2 = g^2$, α, β. Aufl. $\varrho^2 = \frac{g^2 \sin\alpha^2 \sin\beta^2}{4 \sin(\alpha + \beta) (\sin\alpha + \sin\beta)}$.

b) Läßt sich aus den gegebenen Stücken ein durch zwei Seiten und eine Diagonale gebildetes Dreieck, etwa ABC, berechnen, so kennt man

von dem anderen, nämlich ACD, die Stücke AC = c, AD — DC = a — b, ∠ ADC = $\pi - \beta$; daher ist dasselbe zu berechnen nach §. 14, 53.

67. a, b, β
68. a, c, β'
69. a, b, c
70. a, α', β'
71. c, α', β'
72. a, b, α'
73. a, c, β
74. a + b, c, β (§. 14, 51)
75. a — b, c, β (§. 14, 53)
76. a + b, c, α' (§. 14, 70)
77. a — b, c, α' (§. 14, 71)
78. a, b, r
79. a, c, r
80. a, r, β
81. c, r, β'
82. a, r, β'
83. r, α', β'
84. a + b, c, r (§. 14, 310)
85. a — b, c, r (§. 14, 311)
86. a + b, r, β (§. 14, 20)
87. a — b, r, β (§. 14, 24)
88. a, b, $\alpha' - \beta'$ (§. 14, 78)
89. c, r, $\alpha' - \beta'$
90. c, a + b, $\alpha' - \beta'$ (§. 14, 52)
91. c, a — b, $\alpha' - \beta'$ (§. 14, 54)
92. r, a + b, $\alpha' - \beta'$ (§. 14, 23)
93. r, a — b, $\alpha' - \beta'$ (§. 14, 26)
94. a + b, α' β' (§. 14, 1)
95. a — b, α', β' (§. 14, 2).

c) Die sieben Winkel α, β, ε, α', β', γ', δ' sind sämmtlich bestimmt, wenn man zwei von ihnen kennt. Es bestehen nämlich unter denselben die sieben Gleichungen $\beta' + \gamma' = \alpha$ (I), $\gamma' + \delta' = \beta$ (II), $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ (III), $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = \pi$ (IV), $\alpha' + \delta' = \pi - \alpha$ (V), $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (VI), $\beta' + \delta' = \pi - \varepsilon$ (VII), von denen aber die drei letzten eine Folge der anderen sind, so daß wir in der That nur vier Gleichungen zwischen den Winkeln haben. Eine fünfte ergiebt sich, wenn man in die Gleichung a + c = b + d die Ausdrücke a = 2 r sin α', b = 2 r sin β', c = 2 r sin γ', d = 2 r sin δ' einführt. Man erhält dann sin α' + sin γ' = sin β' + sin δ' (VIII).

1. Gegeben sei γ' und δ'. Dann ist nach (VIII) und (IV) $\sin\alpha' - \sin\beta' = \sin\delta' - \sin\gamma'$ und $\alpha' + \beta' = \pi - \gamma' - \delta'$, daher α' und β' zu berechnen nach §. 4, 3.

2. Gegeben sei α' und γ'. Nach (VIII) und (IV) ist $\sin\beta' + \sin\delta' = \sin\alpha' + \sin\gamma'$ und $\beta' + \delta' = \pi - \alpha' - \gamma'$; daher β' und δ' zu berechnen nach §. 4, 1.

3. Gegeben sei α und β. Aus (VIII) folgt $\sin \frac{1}{2}(\alpha' + \gamma') \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') = \sin \frac{1}{2}(\beta' + \delta') \cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')$, und da nach (I) und (VI) $\alpha' - \gamma' = \pi - \alpha - \beta$, und nach (I) und (II) $\beta' - \delta' = \alpha - \beta$ ist, so erhält man mit Benutzung von (III) und (VII) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$.

4. Gegeben sei α und ε. Aus (VIII) folgt $\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \beta') \cos \frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \sin \frac{1}{2}(\delta' - \gamma') \cos \frac{1}{2}(\delta' + \gamma')$, und da nach (III) und (I) $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$ und nach (VII) und (I) $\delta' - \gamma' = \pi - \varepsilon - \alpha$ ist, so erhält man mit Benutzung von (II) und (VI) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)}$.

Sind so sämmtliche Winkel berechnet, so sind die Aufgaben dieser Unterabtheilung entweder auf die der vorigen zurückgeführt, oder man kann r finden und aus diesem und den Peripheriewinkeln die Seiten oder endlich ρ aus den Winkeln und dem gegebenen Stücke.

96. a, γ', δ'	108. r, α', γ'	120. a, α, ε
97. f, γ', δ'	109. ϱ, α', γ'	121. b, α, ε
98. ϱ, γ', δ'	110. a + b, α', γ'	122. e, α, ε
99. a + b, γ', δ'	111. a — b, α', γ'	123. f, α, ε
100. a — b, γ', δ'	112. a + c, α', γ'	124. ϱ, α, ε
101. a + c, γ', δ'	113. a — c, α', γ'	125. r, α, ε
102. a — c, γ', δ'	114. $a^2 - c^2$, α', γ'	126. a + b, α, ε
103. F, γ', δ'	115. F, α', γ'	127. a — b, α, ε
104. $a^2 - c^2$, γ', δ'	116. e, α, β	128. a + c, α, ε
105. a, α', γ'	117. r, α, β	129. a — c, α, ε
106. b, α', γ'	118. a + b, α, β	130. F, α, ε
107. e, α', γ'	119. a — b, α, β	131. $a^2 - c^2$, α, ε.

Ist e + f gegeben, so findet man, da $e = 2 r \sin\beta$, $f = 2 r \sin\alpha$, leicht $r = \frac{e + f}{2(\sin\alpha + \sin\beta)}$, $a = 2 r \sin\alpha' = \frac{(e + f)\sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\beta}$ u. s. w. Aehnlich verhält es sich, wenn f — e gegeben ist.

132. e + f, α, β	135. f — e, γ', δ'	138. e + f, α, ε
133. f — e, α, β	136. e + f, α', γ'	139. f — e, α, ε.
134. e + f, γ', δ'	137. f — e, α', γ'	

d) Die folgenden Aufgaben lassen sich mit Beachtung von §. 25, a) und b) leicht auf den vorigen Fall zurückführen. Bei einigen ist zu berücksichtigen, daß $a - b = 2\varrho \cot\alpha$, ferner, daß $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$.

140. a, r, γ'	146. e, r, $\alpha' - \beta'$	151. a — b, ϱ, α' (98)
141. a, r, ε	147. e, r, $\alpha' - \gamma'$	152. a — b, ϱ, β' (98)
142. a, r, $\alpha + \beta$	148. e, r, α (117)	153. a — b, ϱ, ε (124)
143. a, r, α	149. e, f, α (116)	154. a—b, ϱ, $\alpha'-\gamma'$ (119)
144. e, r, α'	150. a, c, α' (105)	155. a—b, ρ, $\beta'-\gamma'$ (98).
145. e, r, ε		

156. $a + c = s$, r, ε. Aufl. $\sin\alpha' + \sin\gamma' = \frac{s}{2r}$, und $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ (§. 4, 1).
157. $a - c$, r, ε. Aufl. ähnlich wie 156.
158. $e + f$, r, $\alpha + \beta$. Aufl. ähnlich wie 156.
159. $f - e$, r, $\alpha + \beta$. Aufl. ähnlich wie 156.
160. $e + f$, r, $\alpha - \beta$. Aufl. ähnlich wie 156.
161. $f - e$, r, $\alpha - \beta$. Aufl. ähnlich wie 156.
162. a, c, ε. Aufl. $\frac{\sin\alpha'}{\sin\gamma'} = \frac{a}{c}$, $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ (§. 7, 1).
163. e, f, $\alpha + \beta$. Aufl. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{f}{e}$ (§. 7, 1).
164. e, f, $\alpha - \beta$. Aufl. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{f}{e}$ (§. 7. 2).
165. e, f, ε. Aufl. $\sin\alpha^2 - \frac{e+f}{e\sin\varepsilon}\sin\alpha + \frac{f}{e} = 0$.
166. a, b, ε. Aufl. $\cot{}^1\!/_2\alpha = \frac{a \operatorname{tg}{}^1\!/_2\varepsilon}{b}$.
167. a, b, $\delta' - \gamma'$. Aufl. $\cot{}^1\!/_2\alpha \cot{}^1\!/_2\varepsilon = \frac{a}{b}$, $\alpha + \varepsilon = \pi - (\delta' - \gamma')$, also §. 6, 11.
168. $e + f$, F, ε. Aufl. $ef = \frac{2F}{\sin\varepsilon}$ (§. 10. 165).
169. $f - e$, F, ε (168).
170. $f^2 - e^2 = g^2$, α, β. Aufl. $g^2 = 4r^2(\sin\alpha^2 - \sin\beta^2)$; daher $r = \frac{g}{2\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$.
171. $f^2 - e^2$, γ', δ' (170). 172. $f^2 - e^2$, α', γ' (170).
173. $f^2 - e^2$, α, ε (170).

e) Für die folgenden Aufgaben ist es vielfach von Vortheil, sämmtliche Stücke durch r, α', β', γ', δ' oder durch r, ε, $\alpha' - \gamma'$, $\beta' - \delta'$ auszudrücken. Man erhält $a = 2r\sin\alpha'$, $b = 2r\sin\beta'$, $c = 2r\sin\gamma'$, $d = 2r.\sin\delta'$, $e = 2r\sin\beta$, $f = 2r\sin\alpha$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$, $\alpha - \beta = \beta' - \delta'$, $\operatorname{tg}{}^1\!/_2\varepsilon = \frac{\cos{}^1\!/_2(\beta' - \delta')}{\cos{}^1\!/_2(\alpha' - \gamma')}$, $a + c = 4r\sin{}^1\!/_2\varepsilon \cos{}^1\!/_2(\alpha' - \gamma') = 4r\cos{}^1\!/_2\varepsilon\cos{}^1\!/_2(\beta' - \delta')$, $a - c = 4r\cos{}^1\!/_2\varepsilon \sin{}^1\!/_2(\alpha' - \gamma')$, $b - d = 4r\sin{}^1\!/_2\varepsilon\sin{}^1\!/_2(\beta' - \delta')$, $e + f = 4r\cos{}^1\!/_2(\alpha' - \gamma')\cos{}^1\!/_2(\beta' - \delta')$, $f - e = 4r\sin{}^1\!/_2(\alpha' - \gamma') \sin{}^1\!/_2(\beta' - \delta')$, $a^2 - c^2 = (a + c)(a - c) = 4r^2\sin\varepsilon\sin(\alpha' - \gamma')$, $b^2 - d^2 = 4r^2\sin\varepsilon\sin(\beta' - \delta')$, $f^2 - e^2 = 4r^2\sin(\alpha' - \gamma') \sin(\beta' - \delta')$.

174. $a + c = s, r, \alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin {}^1/_2 \varepsilon = \frac{s}{4\,r \sin {}^1/_2 \sigma}$.

175. $a - c = g, r, \alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \varepsilon = \frac{g}{4\,r \cos {}^1/_2 \sigma}$.

176. $a + c = s, r, \alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \varepsilon = \frac{s}{4\,r \cos {}^1/_2 \tau}$.

177. $e + f = s, r, \varepsilon$. Aufl. $\cos {}^1/_2 (\beta' - \delta') = \sqrt{\frac{s \operatorname{tg} {}^1/_2 \varepsilon}{4\,r}}$;
$\cos {}^1/_2 (\alpha' - \gamma') = \sqrt{\frac{s \cot {}^1/_2 \varepsilon}{4\,r}}$.

178. $e + f = s, a + c = s', \varepsilon$. Aufl. $\cos \frac{\alpha' - \gamma'}{2} = \frac{s \cos {}^1/_2 \varepsilon}{s'}$,
$\cos {}^1/_2 (\beta' - \delta') = \frac{s \sin {}^1/_2 \varepsilon}{s'}$.

179. $f - e = g, a - c = g', \varepsilon$. Aufl. $\sin {}^1/_2 (\beta' - \delta') = \frac{g \cos {}^1/_2 \varepsilon}{g'}$.

180. $e + f = s, a - c = g, \varepsilon$. Aufl. $\sin {}^1/_2 (\alpha' - \gamma')^2 + \frac{s \cos {}^1/_2 \varepsilon^2}{g \sin {}^1/_2 \varepsilon}$
$\sin {}^1/_2 (\alpha' - \gamma') - 1 = 0$.

181. $e + f = s, a + c = s', \alpha + \beta$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \varepsilon = \frac{s' \sin {}^1/_2 (\alpha + \beta)}{s}$.

182. $e + f = s, a + c = s', \alpha - \beta$. Aufl. $\sin {}^1/_2 \varepsilon = \frac{s' \cos {}^1/_2 (\alpha - \beta)}{s}$.

183. $e + f = s, a - c = g, \alpha + \beta$. Aufl. $\sin {}^1/_2 \varepsilon^2 + \frac{g}{s}$
$\sin {}^1/_2 (\alpha + \beta) \operatorname{tg} {}^1/_2 (\alpha + \beta) \sin {}^1/_2 \varepsilon - 1 = 0$.

184. $f - e = g, a - c = g', \alpha + \beta$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \varepsilon^4$
$- \frac{g'^2 \{1 + \sin {}^1/_2 (\alpha + \beta)^2\}}{g^2} \cos {}^1/_2 \varepsilon^2 + \frac{g'^2 \sin {}^1/_2 (\alpha + \beta)^2}{g^2} = 0$.

185. $f - e = g, a - c = g', \alpha - \beta$. Aufl. $\cos {}^1/_2 \varepsilon = \frac{g' \sin {}^1/_2 (\alpha - \beta)}{g}$.

186. $a - c = g, b - d = g', \varepsilon$. Aufl. $\frac{\cos {}^1/_2 (\beta' - \delta')}{\cos {}^1/_2 (\alpha' - \gamma')} = \operatorname{tg} {}^1/_2 \varepsilon$,
$\frac{\sin {}^1/_2 (\beta' - \delta')}{\sin {}^1/_2 (\alpha' - \gamma')} = \frac{g' \cot {}^1/_2 \varepsilon}{g}$ (§. 9, 3).

187. $e + f = s, a + c = s', r$. Aufl. $\sin \varepsilon = \frac{s'^2}{2\,r\,s}$.

188. $a^2 - c^2 = g^2, r, \varepsilon$. Aufl. $\sin (\alpha' - \gamma') = \frac{g^2}{4\,r^2 \sin \varepsilon}$.

189. $a^2 - c^2 = g^2$, r, $\alpha + \beta$. Aufl. $\sin \varepsilon = \frac{g^2}{4 r^2 \sin(\alpha + \beta)}$.

190. $f^2 - e^2 = g^2$, r, $\alpha + \beta$. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g^2}{4 r^2 \sin(\alpha + \beta)}$.

191. $f^2 - e^2 = g^2$, r, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{g^2}{4 r^2 \sin \tau}$.

192. $f^2 - e^2 = g^2$, $a^2 - c^2 = g'^2$, ε. Aufl. $\sin(\beta' - \delta') = \frac{g^2 \sin \varepsilon}{g'^2}$.

193. $f^2 - e^2 = g^2$, $a^2 - c^2 = g'^2$, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin \varepsilon = \frac{g'^2 \sin \tau}{g^2}$.

194. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g'^2 \sin \sigma}{g^2}$.

195. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{g^2 \sin \tau}{g'^2}$.

196. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, ε. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \frac{g'^2 \cot \frac{1}{2}\varepsilon}{g^2}$, und $\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon$ (§. 9, 3).

197. r, ϱ, $e + f = s$. Aufl. Aus ϱ und r findet man, wie in 45, $\sin\alpha \sin\beta$; ferner ist $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{s}{2r}$.

198. r, ϱ, $e - f$. Aufl. ähnlich wie 197.

199. $e + f$, a, c. Aufl. Aus den Ausdrücken für $e + f$, $a + c$, $a - c$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon$ folgen nach Elimination von r und $\frac{\beta' - \delta'}{2}$ die Gleichungen

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \frac{(a + c)^2}{(e + f)(a - c)} \text{ und } \frac{\cos \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \frac{a + c}{e + f}.$$

Setzt man in der ersten Gleichung $\frac{(a + c)^2}{a - c} = p$, so geht dieselbe über in $\frac{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \frac{p}{s}$, so daß §. 9, 3 anzuwenden ist.

200. F, r, ε. Aufl. $F = \frac{1}{2} ef \sin\varepsilon = 2 r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\varepsilon$. Führt man statt α und β die Winkel $\alpha' - \gamma'$ und $\beta' - \delta'$ ein, so erhält man $\cos(\beta' - \delta') + \cos(\alpha' - \gamma') = \frac{F}{r^2 \sin\varepsilon}$ oder $\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')^2 + \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')^2 = 1 + \frac{F}{2 r^2 \sin\varepsilon}$ und $\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon$.

201. $e + f = s$, r, ε. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta') = \sqrt{\frac{s \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon}{4r}}$
$\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') = \sqrt{\frac{s \cot \frac{1}{2}\varepsilon}{4r}}$.

202. $f - e = g$, $a - c = g'$, $b - d = g''$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{g''^2 (g^2 - g'^2)}{g'^2 (g^2 - g''^2)}}$.

203. $e + f = s$, $a + c = s'$, F. Aufl. Aehnlich wie bei 200 findet man $F = 2r^2 \sin\varepsilon [\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')^2 + \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')^2 - 1]$ und da $s^2 = 16 r^2 \cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')^2 \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')^2$ ist, $\frac{F}{s^2 \sin\varepsilon} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')^2 + \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')^2 - 1}{8 \cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')^2 \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')^2}$. Setzt man in diese Gleichung die durch Elimination von r aus den Gleichungen für $e + f$, $a + c$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon$ entstandenen Ausdrücke $\cos \frac{1}{2} \beta' - \delta') = \frac{s \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{s'}$, $\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') = \frac{s \cos \frac{1}{2}\varepsilon}{s'}$ ein, so erhält man durch Auflösung der resultirenden Gleichung $\sin\varepsilon = \frac{(s^2 - s'^2) s'^2}{2 s^2 F}$.

§. 33.

Aufgaben über das Tangententrapez.

Die zu berechnenden Stücke sind die Seiten, die Winkel und der Inhalt F.

a) Sämmtliche Stücke lassen sich, und zwar meistentheils einfach, durch ϱ, α, β ausdrücken. Man findet leicht $a = \varrho (\cot \frac{1}{2}\alpha + \cot \frac{1}{2}\beta) = \frac{\varrho \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}$, $b = \varrho (\cot \frac{1}{2}\beta + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta) = \frac{2\varrho}{\sin\beta}$, $c = \varrho (\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta) = \frac{\varrho \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}$, $d = \varrho (\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + \cot \frac{1}{2}\alpha) = \frac{2\varrho}{\sin\alpha}$, $a + c = b + d = \frac{2\varrho (\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$, $a - c = \frac{2\varrho \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$, $b - d = \frac{2\varrho (\sin\alpha - \sin\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$, $a - b = \varrho (\cot \frac{1}{2}\alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta) = \frac{\varrho \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}$, $b - c = \varrho (\cot \frac{1}{2}\beta - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha) = \frac{\varrho \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}$, $F = \frac{2\varrho^2 (\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$.

Die gegebenen Stücke liefern die nöthige Anzahl von Gleichungen, um ϱ, α, β, soweit sie nicht schon bekannt sind, zu bestimmen. Die übrigen zu suchenden Stücke kann man dann aus den vorstehenden Gleichungen berechnen. Ist ϱ nicht gegeben, so braucht man nicht ϱ selbst zu berechnen, sondern kann den Ausdruck für ϱ in die Gleichung für das zu suchende Stück einsetzen, oder auch von vornherein ϱ eliminiren.

1. ϱ, α, β.

2. a, α, β. Aufl. $b = \frac{a \sin {}^1/_2 \alpha}{\sin {}^1/_2 (\alpha + \beta) \cos {}^1/_2 \beta}$, $c = a \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha \operatorname{tg} {}^1/_2 \beta$, $d = \frac{a \sin {}^1/_2 \beta}{\sin {}^1/_2 (\alpha + \beta) \cos {}^1/_2 \alpha}$.

3. b, α, β. Aehnlich wie 2.

4. a, ϱ, α. Aufl. $\cot {}^1/_2 \beta = \frac{a}{\varrho} - \cot {}^1/_2 \alpha$.

5. b, ϱ, α.

6. a, b, α. Aufl. $\sin {}^1/_2 (\alpha + \beta) \cos {}^1/_2 \beta = \frac{a \sin {}^1/_2 \alpha}{b}$ und ${}^1/_2 (\alpha + \beta) - {}^1/_2 \beta = {}^1/_2 \alpha$ (§. 6, 4).

7. a, b, β. Aufl. $\frac{\sin {}^1/_2 (\alpha + \beta)}{\sin {}^1/_2 \alpha} = \frac{a}{b \cos {}^1/_2 \beta}$ (§. 7, 2).

8. a, c, α. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \beta = \frac{c \cot {}^1/_2 \alpha}{a}$.

9. b, d, α. Aufl. $\sin \beta = \frac{d \sin \alpha}{b}$.

10. a, b, ϱ (7).

11. a, c, ϱ. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 (\alpha + \beta) = \frac{ac}{(a - c) \varrho}$, $\cos {}^1/_2 (\alpha - \beta) = \frac{(a + c) \varrho \sin {}^1/_2 (\alpha + \beta)}{ac} = \frac{(a + c) \cos {}^1/_2 (\alpha + \beta)}{a - c}$.

12. b, d, ϱ.

13. a, b, c. Aufl. Zunächst ist $d = a + c - b$. Aus $\frac{b}{d} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ und $\frac{c}{a} = \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha \operatorname{tg} {}^1/_2 \beta$ folgt durch Multiplication und Division $\frac{\sin {}^1/_2 \alpha^2}{\cos {}^1/_2 \beta^2} = \frac{bc}{ad}$ und $\frac{\sin {}^1/_2 \beta^2}{\cos {}^1/_2 \alpha^2} = \frac{cd}{ab}$ und hieraus $\cos {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{a (a - b)}{d (a - c)}}$, $\sin {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{c (b - c)}{d (a - c)}}$, $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{c (b - c)}{a (a - b)}}$.

Aehnliche Ausdrücke für β. Ferner ist $\rho = \frac{\sqrt{ac\,(a-b)\,(b-c)}}{a-c}$,

$F = \frac{(a+c)\sqrt{ac\,(a-b)\,(b-c)}}{a-c}$.

14. $a-b,\ \alpha,\ \beta$ (1).

15. $a-b,\ \varrho,\ \alpha$. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2\beta = \cot {}^1/_2\alpha - \frac{a-b}{\varrho}$.

16. $a-b,\ \varrho,\ \beta$. Aufl. $\cot {}^1/_2\alpha = \frac{a-b}{\varrho} + \operatorname{tg} {}^1/_2\beta$.

17. $a+c,\ \alpha,\ \beta$. 18. $a-c,\ \alpha,\ \beta$. 19. $b-d,\ \alpha,\ \beta$.

20. $a+c,\ \varrho,\ \alpha$. Aufl. $\sin\beta = \frac{2\varrho\sin\alpha}{(a+c)\sin\alpha - 2\varrho}$

$= \frac{2\varrho}{a+c-\frac{2\varrho}{\sin\alpha}}$.

21. $a-c,\ \varrho,\ \alpha$. Aufl. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{(a-c)\sin\alpha}{2\varrho}$ (§. 7, 2).

22. $b-d,\ \varrho,\ \alpha$. 23. $a-c,\ b,\ \alpha$.

24. $a-c,\ b,\ \beta$ (§. 7, 2).

25. $a-c=g,\ b-d=g',\ \alpha$. Aufl. $\frac{\sin {}^1/_2(\alpha+\beta)}{\sin {}^1/_2(\alpha-\beta)} = \frac{g}{g'}$;

${}^1/_2(\alpha+\beta) + {}^1/_2(\alpha-\beta) = \alpha$ (§. 7, 1).

26. $a-b=g,\ b-c=g',\ \alpha$.

27. $a-b=g,\ b-c=g',\ \beta$.

28. $a,\ \varrho,\ \alpha+\beta=\sigma$. Aufl. $\cot {}^1/_2\alpha + \cot {}^1/_2\beta = \frac{a}{\varrho}$ (§. 4, 17),

oder $\sin {}^1/_2\ \sin {}^1/_2\beta = \frac{\varrho\sin {}^1/_2\sigma}{a}$ (§. 6, 1).

29. $a,\ \varrho,\ \alpha-\beta=\tau$. Aufl. (§. 4, 18) oder $2\varrho\sin {}^1/_2(\alpha+\beta)$ $+\ a\cos {}^1/_2(\alpha+\beta) = a\cos {}^1/_2\tau$ (§. 3, 1).

30. $a,\ c,\ \alpha+\beta=\sigma$. Aufl. $\cos {}^1/_2(\alpha-\beta) = \frac{(a+c)\cos {}^1/_2\sigma}{a-c}$.

31. $a,\ c,\ \alpha-\beta$ (30).

32. $b,\ d,\ \alpha+\beta=\sigma$. Aufl. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{b}{d}$ (§. 7, 1), oder

$\operatorname{tg} {}^1/_2(\alpha-\beta) = \frac{(b-d)\operatorname{tg} {}^1/_2\sigma}{b+d}$.

33. $b,\ d,\ \alpha-\beta$ (32).

34. $a,\ b,\ \alpha+\beta=\sigma$. Aufl. $\frac{\sin {}^1/_2\alpha}{\cos {}^1/_2\beta} = \frac{b\sin {}^1/_2\sigma}{a}$ (§. 7, 3), oder

$\operatorname{tg} {}^1/_2\beta = \frac{(a-b)\operatorname{tg} {}^1/_2\sigma}{a}$.

35. $a - b = g, \varrho, \alpha + \beta$. Aufl. $\cot {}^1\!/_2\alpha - \operatorname{tg} {}^1\!/_2\beta = \frac{g}{\varrho}$ (§. 4, 23).
36. $a - b, \varrho, \alpha - \beta$ (§. 4, 24 oder §. 6, 4).
37. $a + c = s, \varrho, \alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos {}^1\!/_2 (\alpha - \beta)^2 - \frac{4 \rho \sin {}^1\!/_2 \sigma}{s}$ $\cos {}^1\!/_2 (\alpha - \beta) - \cos {}^1\!/_2 \sigma^2 = 0$.
38. $a + c = s, \rho, \alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)^2 - \frac{4 \rho \cos {}^1\!/_2 \tau}{s}$ $\sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) - \sin {}^1\!/_2 \tau^2 = 0$.
39. $a - c, \varrho, \alpha + \beta$ (§. 6, 1).
40. $a - c = g, \varrho, \alpha - \beta = \tau$. Aufl. $g \cos (\alpha + \beta) + 4 \varrho \sin (\alpha + \beta) = g \cos \tau$ (§. 3, 1).
41. $b - d = g, \varrho, \alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin {}^1\!/_2 (\alpha - \beta)^2 + \frac{4 \varrho \cos {}^1\!/_2 \sigma}{g}$ $\sin {}^1\!/_2 (\alpha - \beta) - \sin {}^1\!/_2 \sigma^2 = 0$.
42. $b - d = g, \rho, \alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\cos {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)^2 + \frac{4 \rho \sin {}^1\!/_2 \tau}{g}$ $\cos {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) - \cos {}^1\!/_2 \tau^2 = 0$.
43. $a - c, b, \alpha + \beta$. 44. $a - c, b - d, \alpha + \beta$.
45. $a - c, b - d, \alpha - \beta$.
46. $a - b = g, b - c = g', \alpha + \beta$. Aufl. $\frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \alpha}{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \beta} = \frac{g'}{g}$ (§. 6, 9).
47. $a - b, b - c, \alpha - \beta$ (§. 6, 10).
48. $a + c = s, a - b = g, \alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $2 g \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \sigma \cos {}^1\!/_2 (\alpha - \beta) + s \sin {}^1\!/_2 (\alpha - \beta) = s \sin {}^1\!/_2 \sigma$ (§. 3, 1).
49. $a - c, b, \rho$ (24).
50. $a - c = g, b - d = g', \varrho$. Aufl. Es ist $g - g' = 2 (a - b) = \frac{2 \varrho \cos {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)}{\sin {}^1\!/_2 \alpha \cos {}^1\!/_2 \beta}$, folglich $\frac{\sin {}^1\!/_2 \alpha \cos {}^1\!/_2 \beta}{\cos {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)} = \frac{2 \varrho}{g - g'}$, und ebenso $\frac{\cos {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 \beta}{\cos {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)} = \frac{2 \varrho}{g + g'}$. Durch Addition und Subtraction beider Gleichungen findet man $\operatorname{tg} {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) = \frac{4 \varrho g}{g^2 - g'^2}$ und $\sin {}^1\!/_2 (\alpha - \beta) = \frac{4 \varrho g' \cos {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)}{g^2 - g'^2} = \frac{g' \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)}{g}$.
51. F, α, β. 52. F, ϱ, α.
53. F, a, α. Aufl. Man erhält, indem man ϱ aus den Gleichungen für a und F eliminirt, $\frac{\sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) \cos {}^1\!/_2 \beta}{\sin {}^1\!/_2 \beta \cos {}^1\!/_2 (\alpha - \beta)} = \frac{a^2 \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \alpha}{F}$, und wenn man auf der linken Seite die Producte durch Summen und Differenzen zweier Sinusse ausdrückt und Alles entwickelt,

$\frac{a^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + F}{a^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha - F} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$. Durch die Substitution $\frac{F}{a^2} = \operatorname{tg}\varphi$ entsteht hieraus $\frac{\sin(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)} \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ (§. 3, 1).

54. F, b, β. Aufl. $\sin\alpha = \frac{b^2 \sin\beta^2}{2F - b^2 \sin\beta}$.

55. F, b, α. Aufl. $\sin\beta^2 + \sin\alpha \sin\beta - \frac{2F \sin\alpha}{b^2} = 0$.

56. F, $a + c = s$, α. Aufl. $\sin\beta = \frac{2F \sin\alpha}{s^2 \sin\alpha - 2F}$.

57. F, ϱ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \frac{4\varrho^2 \sin\frac{1}{2}\sigma}{F} \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos\frac{1}{2}\sigma^2 = 0$.

58. F, ϱ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 - \frac{4\varrho^2 \cos\frac{1}{2}\tau}{F} \cdot \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \sin\frac{1}{2}\tau^2 = 0$.

59. F, a, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \left[\frac{F}{a^2} \sin\frac{1}{2}\sigma + \cos\frac{1}{2}\sigma\right] \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \frac{F \sin\sigma}{2a^2} = 0$, wobei §. 3, 1 in Anwendung kommt.

60. F, $a + c = s$, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 - \frac{4F \sin\frac{1}{2}\sigma}{s^2} \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos\frac{1}{2}\sigma^2 = 0$.

61. F, $a + c = s$, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 - \frac{4F \cos\frac{1}{2}\tau}{s^2} \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \sin\frac{1}{2}\tau^2 = 0$.

62. F, a, c. Aufl. Aus den Gleichungen für F, a und c findet man $\frac{a + c}{a - c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$ und $\frac{F}{ac} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$, also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{(a + c)\, ac}{(a - c) F}$.

63. F, a, ϱ. Aufl. $a + c = \frac{F}{\varrho}$ (62).

64. F, $a - c$, ϱ (63). 65. F, b, ϱ (52).

66. F, b, d. Aufl. $\varrho = \frac{F}{b + d}$, $\sin\alpha = \frac{2\varrho}{d} = \frac{2F}{(b + d)\, d}$.

67. F, $b - d$, ρ. Aufl. $b + d = \frac{F}{\varrho}$, $\sin\alpha = \frac{2\varrho}{d}$.

68. $a^2 - c^2 = g^2$, α, β. Aufl. $\rho = \frac{g \sin\alpha \sin\beta}{4 \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sqrt{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}}$.

69. $b^2 - d^2 = g^2, \alpha, \beta$. Aufl. $\varrho = \frac{g \sin\alpha \sin\beta}{2\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$.

70. $a^2 - c^2 = g^2, b^2 - d^2 = g'^2, \alpha$. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{g^2}{g'^2}$, $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \alpha$ (§. 7, 1).

71. $a^2 - c^2, b^2 - d^2, \alpha + \beta$ (70).

72. $a^2 - c^2, b^2 - d^2, \alpha - \beta$ (70).

b) Läßt sich aus den gegebenen Stücken ein durch eine Diagonale und zwei Seiten gebildetes Dreieck, etwa ABC, berechnen, so kennt man von dem anderen, nämlich ACD, die Stücke AC = e, AD — DC = a — b, und $\angle$ DCA = β'. Daher ist dasselbe zu berechnen nach §. 14, 71.

73. a, e, β'
74. b, e, α''
75. a, b, e
76. a, b, α''
77. a, b, β'
78. a, e, β
79. a, e, α''
80. b, e, β
81. b, e, β'
82. a, β, β'
83. b, β, β'
84. e, β, β'
85. a, e, ϱ
86. b, e, ϱ
87. a, ϱ, β'
88. b, ϱ, β'
89. b, ϱ, α''
90. e, ϱ, β
91. e, ϱ, α''
92. ϱ, β, β'
93. a, ρ, α'' (§. 14, 65)
94. a + b, e, β (§. 14, 51)
95. a — b, e, β (§. 14, 53)
96. a + b, e, β' (§. 14, 70)
97. a — b, e, β' (§. 14, 71)
98. a + b, e, α'' (§. 14, 70)
99. a — b, e, α'' (§. 14, 71)
100. a + b, ϱ, e (§. 14, 70)
101. a — b, ϱ, e (§. 14, 71)
102. a + b, β, β' (§. 14, 1)
103. a — b, β, β' (§. 14, 2)
104. a + b, ϱ, β' (§. 14, 99)
105. a — b, ρ, β' (§. 14, 129)
106. $a^2 - b^2$, β, β' (§. 14, 12)
107. $a^2 - b^2$, e, β (§. 14, 62)
108. $a^2 - b^2$, e, β' (§. 14, 74)
109. $a^2 - b^2$, e, α'' (§. 14, 74).

c) Durch zwei beliebige Winkel des Tangententrapezes sind im Allgemeinen auch seine sämmtlichen anderen Winkel bestimmt, doch läßt sich die Berechnung derselben nur in wenigen Fällen einfach ausführen. Es dienen hierzu folgende Relationen. Es ist a — b = d — c, ferner $\frac{a-b}{e} = \frac{\sin\alpha'' - \sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha'' - \sin\beta'}{\sin(\alpha''+\beta')} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha''+\beta')}$, und ebenso $\frac{d-c}{e} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta'-\gamma'')}{\sin \frac{1}{2}(\beta'+\gamma'')}$, folglich ist $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha''+\beta')} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta'-\gamma'')}{\sin \frac{1}{2}(\beta'+\gamma'')}$ (I); ebenso findet man $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha'-\beta'')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha'+\beta'')} =$

$\frac{\sin {}^1/_2 (\beta'' - \gamma')}{\sin {}^1/_2 (\beta'' + \gamma')}$ (II). Durch eine leichte Transformation erhält man hieraus die Gleichungen $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha'' . \operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma'' = \operatorname{tg} {}^1/_2 \beta'^2$ (III) und $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha' \operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma' = \operatorname{tg} {}^1/_2 \beta''^2$ (IV), und aus diesen Gleichungen durch eine ebenfalls einfache Transformation $\frac{\cos {}^1/_2 (\alpha'' + \gamma'')}{\cos {}^1/_2 (\alpha'' - \gamma'')} = \cos \beta'$ (V) und $\frac{\cos {}^1/_2 (\alpha' + \gamma')}{\cos {}^1/_2 (\alpha' - \gamma')} = \cos \beta''$ (VI). Die Gleichungen (I) und (II) kann man auch noch in der Form $\frac{\sin {}^1/_2 (\alpha'' - \beta')}{\sin {}^1/_2 (\beta' - \gamma'')} = \frac{\cos {}^1/_2 \beta}{\sin {}^1/_2 \alpha}$ (VII) und $\frac{\sin {}^1/_2 (\alpha' - \beta'')}{\sin {}^1/_2 (\beta'' - \gamma')} = \frac{\cos {}^1/_2 \alpha}{\sin {}^1/_2 \beta}$ (VIII) schreiben. Da ferner $\alpha' + \gamma'' = \alpha'' + \gamma' = \varepsilon$ ist, so ist $\alpha' - \gamma' = \alpha'' - \gamma''$. Dividirt man also (V) durch (VI), so ergiebt sich $\frac{\cos {}^1/_2 (\alpha'' + \gamma'')}{\cos {}^1/_2 (\alpha' + \gamma')} = \frac{\cos \beta'}{\cos \beta''}$ (IX).

1. Gegeben sei α' und γ'. Man findet zunächst β'' aus (IV) oder (VI), ferner $\alpha = \pi - \alpha' - \beta''$, $\beta = \gamma' + \beta''$. Zur Berechnung der noch fehlenden Winkel kann man ein zweifaches Verfahren anwenden. Erstens findet man aus (VII) und ${}^1/_2 (\alpha'' - \beta') + {}^1/_2 (\beta' - \gamma'') = {}^1/_2 (\alpha'' - \gamma'') = {}^1/_2 (\alpha' - \gamma')$ mit Hülfe von §. 7, 1 ${}^1/_2 (\alpha'' - \beta')$ und ${}^1/_2 (\beta' - \gamma'')$; und da ${}^1/_2 (\alpha'' + \beta') = {}^1/_2 \pi - {}^1/_2 \beta$, ${}^1/_2 (\beta' + \gamma'') = {}^1/_2 \alpha$ ist, findet man auch α'', β', γ''. Zweitens ergiebt sich aus (V) $\frac{\cos {}^1/_2 (\alpha'' + \gamma'')}{\cos \beta'} = \cos {}^1/_2 (\alpha'' - \gamma'') = \cos {}^1/_2 (\alpha' - \gamma')$, und da ${}^1/_2 (\alpha'' + \gamma'') + \beta' = {}^1/_2 (\alpha'' + \beta') + {}^1/_2 (\gamma'' + \beta') = {}^1/_2 \pi + {}^1/_2 (\alpha - \beta) = \pi - {}^1/_2 (\alpha' + \gamma') - \beta''$ ist, so findet man nach §. 7, 5 ${}^1/_2 (\alpha'' + \gamma'')$ und β', und da ${}^1/_2 (\alpha'' - \gamma'') = {}^1/_2 (\alpha' - \gamma')$ ist, auch α'' und γ''. Außer α' und γ' ist gegeben:

110. a	115. a + c	119. a + d	123. $a^2 - b^2$
111. b	116. a — c	120. a — d	124. $a^2 - c^2$
112. ϱ	117. a + b	121. b — d	125. $a^2 - d^2$
113. e	118. a — b	122. F	126. $b^2 - d^2$
114. f			

2. Gegeben sei α' und β''. Aus (IV) findet man γ' und verfährt wie im vorigen Falle. Außer α' und β'' ist gegeben:

127. c	131. a + c	135. b + c	139. $a^2 - c^2$
128. b	132. a — c	136. b — d	140. $a^2 - b^2$
129. e	133. a + b	137. c + d	141. $b^2 - c^2$
130. ϱ	134. a — b	138. F	142. $d^2 - c^2$.

3. Gegeben ist β' und β''. Aus (IX) in Verbindung mit $\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma') + \frac{1}{2}(\alpha''+\gamma'') = \varepsilon$ findet man nach §. 7, 5 $\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma')$ und $\frac{1}{2}(\alpha''+\gamma'')$. Eine der Gleichungen (V) oder (VI) liefert dann $\frac{1}{2}(\alpha'-\gamma')$ oder $\frac{1}{2}(\alpha''-\gamma'')$, wodurch α', α'', γ', γ'' zu finden sind. Außer β' und β'' ist gegeben:

143. a	147. a + c	150. a — b	153. $a^2 - c^2$
144. b	148. a — c	151. b — d	154. $a^2 - b^2$
145. ϱ	149. a + b	152. F	155. $b^2 - d^2$.
146. e			

4. Gegeben ist α und β. 1. Aufl. Aus (VII) und (VIII) findet man in Verbindung mit $\frac{1}{2}(\alpha''-\beta') + \frac{1}{2}(\beta'-\gamma'') = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha'-\beta'') + \frac{1}{2}(\beta''-\gamma') = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ nach §. 7, 1 die Differenzen $\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')$, $\frac{1}{2}(\beta'-\gamma'')$, $\frac{1}{2}(\alpha'-\beta'')$, $\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')$, und da die Summen bekannt sind, auch die Winkel selbst. 2. Aufl. Da $\frac{1}{2}(\alpha'-\gamma') = \frac{1}{2}(\alpha''-\gamma'') = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ist, so gehen (V) und (VI) in $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha''+\gamma'')}{\cos\beta'} = \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma')}{\cos\beta''} = \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ über. Aus diesen Gleichungen erhält man in Verbindung mit $\frac{1}{2}(\alpha''+\gamma'') + \beta' = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha'+\gamma') + \beta'' = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ nach §. 7, 5 β', $\alpha'+\gamma'$, $\alpha''+\gamma''$, und da $\alpha'-\gamma'$ und $\alpha''-\gamma''$ bekannt ist, sämmtliche Winkel. Außer α und β ist gegeben:

156. e.	157. a + b.	158. $a^2 - b^2$.

d) Da $\sin\beta' = \frac{2\varrho}{e}$, $\sin\beta = \frac{2\varrho}{b}$ ist, so findet man β', wenn e und ϱ gegeben sind, so wie β, wenn b und ϱ gegeben sind. Die folgenden Aufgaben lassen sich somit auf die unter c) leicht zurückführen.

159. e, ϱ, β''	162. e, ϱ, $\beta' - \beta''$	164. b, ϱ, β''
160. e, ϱ, γ''	163. e, f, ϱ	165. b, ϱ, γ'.
161. e, ϱ, ε		

e) Zieht man durch C eine Parallele mit BD, welche die Verlängerung von AB in F trifft, so entsteht ein Dreieck AFC mit den Seiten AF = a + c, FC = f, und CA = e und den Winkeln ε, β' und β''. Kann man aus den drei gegebenen Stücken dieses Dreieck berechnen, so kennt man die Winkel β' und β'', und die Aufgabe ist auf eine der in c), 3 enthaltenen zurückgeführt. Will man die geometrische Construction vermeiden, so kann man noch folgenden Weg einschlagen. Aus $a = e\cos\beta' + b\cos\beta$ und $c = f\cos\beta'' - b\cos\beta$ folgt $a + c = e\cos\beta' + f\cos\beta''$. Hierzu kommen noch die Gleichungen $e\sin\beta' = 2\varrho$, $f\sin\beta'' = 2\rho$, aus denen $e\sin\beta'$

$= f \sin\beta''$ folgt. Für die Aufgaben, in denen der Inhalt vorkommt, beachte man, daß vermöge der Gleichung $F = (a + c)\,\varrho$ von den drei Größen F, $a + c$ und ϱ stets eine durch die beiden anderen bestimmt ist.

166. e, f, β'
167. $e, f, a + c$
168. e, f, ε
169. $e, f, \beta' - \beta''$ (§. 14, 78)
170. $a + c, e, \beta'$
171. $a + c, e, \beta''$
172. $a + c, e, \varepsilon$
173. $f + e, \beta', \beta''$ (§. 14, 1)
174. $f - e, \beta', \beta''$ (§. 14, 2)
175. $a + c, f + e, \varepsilon$ (§. 14, 51)
176. $a + c, f - e, \varepsilon$ (§. 14, 53)
177. $a + c, f + e, \beta'$ (§. 14, 70)
178. $a + c, f - e, \beta'$ (§. 14, 71)
179. $a + c, f + e, \beta' - \beta''$ (§. 14, 52)
180. $a + c, f - e, \beta' - \beta''$ (§. 14, 54)
181. $a + c, \varrho, \beta'$
182. $a + c, \varrho, \varepsilon$ (§. 14, 65)
183. $a + c, \varrho, \beta' - \beta''$ (§. 14, 66)
184. $a + c, f + e, \varrho$ (§. 14, 450)
185. $a + c, f - e, \varrho$ (§. 14, 452)
186. $f^2 - e^2, \beta', \beta''$ (§. 14, 12)
187. $a + c, f^2 - e^2, \varepsilon$ (§. 14, 62)
188. $a + c, f^2 - e^2, \beta' - \beta''$ (§. 14, 63)
189. F, ϱ, ε (182)
190. $F, a + c, \varepsilon$ (182)
191. $F, \varrho, \beta' - \beta''$ (183)
192. $F, a + c, \beta' - \beta''$ (183)
193. F, ϱ, β' (181)
194. $F, a + c, \beta'$ (181)
195. F, ϱ, e (20)
196. $F, a + c, e$ (20)
197. $F, \varrho, f + e$ (184)
198. $F, \varrho, f - e$ (185)
199. $F, a + c, f + e$ (184)
200. $F, a + c, f - e$ (185).

201. F, e, f. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{2F}{ef}$ (168).

f) Mit Hülfe des in c) Gesagten lassen sich folgende Aufgaben auf 173, 174 oder 186 zurückführen.

202. $f + e, \alpha' \gamma'$
203. $f + e, \alpha', \beta''$
204. $f + e, \alpha, \beta$
205. $f - e, \alpha', \gamma'$
206. $f - e, \alpha', \beta''$
207. $f - e, \alpha, \beta$
208. $f^2 - e^2, \alpha', \gamma'$
209. $f^2 - e^2, \alpha', \beta''$
210. $f^2 - e^2, \alpha, \beta$.

g) In folgenden Aufgaben kommt es darauf an, die Winkel $\beta, \beta', \varepsilon$ mit α und β in Beziehung zu bringen. Beachtet man, daß $\frac{1}{2}(\alpha' + \gamma') = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \beta''$, $\frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ist, so geht die Gleichung c), (VI) in $\frac{\sin[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta'']}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \cos\beta''$ über, aus welcher man durch weitere Entwicklung $\operatorname{tg}\beta'' = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$ (X) erhält. Aehnlich leitet man $\operatorname{tg}\beta' = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$ (XI) her. Durch Division beider Gleichungen erhält man $\frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\beta''} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}$ (XII). Ferner ist

$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}(\pi - \beta' - \beta'') = -\operatorname{tg}(\beta' + \beta'') = -\frac{\operatorname{tg}\beta' + \operatorname{tg}\beta''}{1 - \operatorname{tg}\beta' \operatorname{tg}\beta''}$. Durch Einsetzen der Werthe für $\operatorname{tg}\beta'$ und $\operatorname{tg}\beta''$ aus (X) und (XI) entsteht hieraus $\operatorname{tg}\varepsilon = -\frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2}$ (XIII).

211. a, c, ε. 1. Aufl. Aus (XII) und $\frac{c}{a} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$ erhält man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{c \operatorname{tg}\beta'}{a \operatorname{tg}\beta''}}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{c \operatorname{tg}\beta''}{a \operatorname{tg}\beta'}}$. Setzt man diese Werthe in die leicht aus (XI) folgende Gleichung $\operatorname{tg}\beta'(1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta) = 2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ ein, so ergiebt sich $\sqrt{\operatorname{tg}\beta' \operatorname{tg}\beta''} = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}$, also $\operatorname{tg}\beta' \operatorname{tg}\beta'' = \frac{4\,ac}{(a+c)^2}$, so daß sich β' und β'' nach §. 6, 7 berechnen lassen, die Aufgabe also auf 143 zurückgeführt ist. 2. Aufl. Aus (XIII) und $\frac{a+c}{a-c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$ ergiebt sich durch Division $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = -\frac{(a-c)\operatorname{tg}\varepsilon}{2\,(a+c)}$.

212. a, c, β'. Aufl. Wie in 211, 1. Aufl., findet man $\operatorname{tg}\beta'' = \frac{4\,ac \cot\beta'}{(a+c)^2}$ (143).

213. a, c, β' — β''. Aufl. (211, 1. Aufl., mit Benutzung von §. 6, 8, dann 143).

214. a — c = g, b — d = g', ε. Aufl. $\frac{g}{g'} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$, folglich $\frac{g+g'}{g-g'} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}$, mithin nach (XII) $\frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\beta''} = \frac{g+g'}{g-g'}$, und $\beta' + \beta'' = \pi - \varepsilon$, also β' und β'' nach §. 6, 9 zu finden, wodurch die Aufgabe auf 148 zurückgeführt ist.

215. a — c = g, b — d = g', β' (214).

216. a — c = g, b — d = g', β' — β''. (214), mit Benutzung von §. 6, 10.

217. b, d, ε. Aufl. Aus $\frac{b+d}{b-d} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$ und (XII) folgt nach Elimination von $\alpha - \beta$, wenn man den Hülfswinkel φ durch die Gleichung $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b-d}{2\,(b+d)}$ einführt, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^4 + \frac{\cos(\varepsilon-\varphi)\cos(\varepsilon+\varphi)}{\cos\varepsilon^2 \cos\varphi^2} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\varepsilon^2 = 0.$

§. 34.

Aufgaben über das Sehnenviereck.

Die Bezeichnungen bleiben wie in §. 25. Die zu berechnenden Stücke sind die Seiten, die Winkel und der Inhalt.

Sämmtliche Stücke lassen sich einfach durch r und die Winkel α', β', γ', δ' ausdrücken. Man findet $a = 2r \sin\alpha'$, $b = 2r \sin\beta'$, $c = 2r \sin\gamma'$, $d = 2r \sin\delta'$, $e = 2r \sin\beta = 2r \sin(\alpha' + \beta')$, $f = 2r \sin\alpha = 2r \sin(\alpha' + \delta')$, $a + b = 2r(\sin\alpha' + \sin\beta')$, $a - b = 2r(\sin\alpha' - \sin\beta')$, $a + c = 2r(\sin\alpha' + \sin\gamma')$, $a - c = 2r(\sin\alpha' - \sin\gamma')$, $f + e = 2r(\sin\alpha + \sin\beta) = 4r \cos\frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') \cos\frac{1}{2}(\beta' - \delta')$, $f - e = 2r(\sin\alpha - \sin\beta) = 4r \sin\frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') \sin\frac{1}{2}(\beta' - \delta')$, $a^2 - b^2 = 4r^2(\sin\alpha'^2 - \sin\beta'^2)$, $a^2 - c^2 = 4r^2(\sin\alpha'^2 - \sin\gamma'^2)$, $f^2 - e^2 = 4r^2(\sin\alpha^2 - \sin\beta^2) = 4r^2 \sin(\alpha' - \gamma') \sin(\beta' - \delta')$, $F = \frac{1}{2} ef \sin\varepsilon = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\varepsilon = 2r^2 \sin(\alpha' + \delta') \sin(\alpha' + \beta') \sin(\alpha' + \gamma')$. Da zur Berechnung eines Sehnenvierecks stets vier Stücke gegeben sein müssen, so erhält man mit Zuhülfenahme der Gleichung $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = \pi$ stets die erforderliche Anzahl von Gleichungen, um die Stücke r, α', β', γ', δ', soweit sie noch nicht gegeben sind, zu berechnen. Die Winkel, so wie die fehlenden Seiten, ergeben sich dann unmittelbar aus den vorstehenden Gleichungen oder die Aufgaben werden zurückgeführt auf §. 25, 1 und 41. Oft empfiehlt es sich, sämmtliche Stücke durch r, α, β, ε auszudrücken und diese Elemente, soweit sie nicht schon gegeben sind, zu berechnen. Man erhält auf diese Weise $\alpha' = \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta + \varepsilon)$, $\beta' = \frac{1}{2}(\pi + \alpha - \beta - \varepsilon)$, $\gamma' = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \varepsilon - \pi)$, $\delta' = \frac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta - \varepsilon)$, $a + b = 4r \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)$, $a - b = 4r \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)$, $c + d = 4r \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha)$, $c - d = -4r \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha) = 4r \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}(2\pi - \varepsilon - \alpha)$, $a + c = 4r \sin\frac{1}{2}\varepsilon \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $a - c = 4r \cos\frac{1}{2}\varepsilon \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $b + d = 4r \cos\frac{1}{2}\varepsilon \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $b - d = 4r \sin\frac{1}{2}\varepsilon \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $f + e = 2r(\sin\alpha + \sin\beta) = 4r \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $f - e = 2r(\sin\alpha - \sin\beta) = 4r \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $a^2 - b^2 = 4r^2 \sin\beta \sin(\varepsilon - \alpha)$, $c^2 - d^2 = -4r^2 \sin\beta \sin(\varepsilon + \alpha) = 4r^2 \sin\beta \sin(\varepsilon + \alpha - \pi)$, $a^2 - c^2 = 4r^2 \sin\varepsilon \sin(\alpha + \beta)$, $b^2 - d^2 = 4r^2 \sin\varepsilon \sin(\alpha - \beta)$, $f^2 - e^2 = 4r^2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$, $a + b + c + d = 4r\left(\sin\frac{1}{2}\varepsilon \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \cos\frac{1}{2}\varepsilon \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right) = 4r\left(\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}(\varepsilon + \beta) + \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}(\varepsilon - \beta)\right) = 4r\left(\sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha) + \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)\right)$, $a + b + c - d = 8r \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\varepsilon$; $-a + b + c + d = 8r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\varepsilon$, $F = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\varepsilon$. Selbstverständlich braucht man in jedem

der beiden soeben angegebenen Verfahren, wenn r unbekannt ist, dasselbe nicht zu berechnen, sondern man kann es entweder gleich Anfangs eliminiren, oder den für dasselbe entwickelten Werth einsetzen. Vielfach kann man auch die aus den sechs ersten Gleichungen folgenden Proportionen $a : b : c : d : e : f = \sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma' : \sin\delta' : \sin\beta : \sin\alpha$ mit Vortheil benutzen.

a) In den folgenden Aufgaben kann man neben dem eben angegebenen allgemeinen Verfahren auch zum Ziele gelangen, indem man aus dreien der gegebenen Stücke ein von zwei Seiten und einer Diagonale gebildetes Dreieck berechnet und im Uebrigen so verfährt wie in §. 25, b). Das allgemeine Verfahren gestattet gewöhnlich eine einfachere Rechnung.

1. a, b, β, $c + d = s$. Aufl. $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{a}{b}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (§. 7, 1), $r = \frac{a}{2\sin\alpha'}$, $\sin\gamma' + \sin\delta' = \frac{s}{2r} = \frac{s\sin\alpha'}{a}$ (§. 4, 1).

2. a, b, β, $c - d$ (1).

3. r, α', β', $c + d = s$. Aufl. $\sin\gamma' + \sin\delta' = \frac{s}{2r}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§. 4, 1).

4. r, α', β', $c - d$ (3).

5. a, e, $c + d = s$, β'. Aufl. $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta} = \frac{a}{e}$, $\alpha' + \beta = \pi - \beta'$ (§. 7, 1), $r = \frac{a}{2\sin\alpha'}$, $\sin\gamma' + \sin\delta' = \frac{s}{2r} = \frac{s\sin\alpha'}{a}$, $\gamma' + \delta' = \beta$ (§. 4, 1).

6. a, e, $c - d$, β' (5).

7. $a + b = s$, α', β', γ'. Aufl. $r = \frac{s}{4\cos{}^1\!/_2\beta\cos{}^1\!/_2(\alpha' - \beta')}$.

8. $a - b$, α', β', γ' (7).

9. $a + b = s$, c, α', β'. Aufl. wie 7, dann $\sin\gamma' = \frac{c}{2r}$.

10. $a - b$, c, α', β' (9).

11. $a + b = s$, f, α', β' (7), dann $\sin\alpha = \frac{f}{2r}$.

12. $a - b$, f, α', β' (11).

13. $a + b = s$, r, α, β. Aufl. $\sin\alpha' + \sin\beta' = \frac{s}{2r}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (§. 4, 1).

14. $a - b$, r, α, β (13).

15. $a + b$, r, β, ε (13).

16. $a - b$, r, β, ε (13).

17. $a + b = s$, e, α', δ'. Aufl. $\frac{\cos{}^1\!/_2(\alpha' - \beta')}{\cos{}^1\!/_2(\alpha' + \beta')} = \frac{s}{e}$ (§. 7, 5).

18. a — b, e, α', δ' (17). 19. a + b = s, e, α', γ' (17).
20. a — b, e, α', γ' (17).
21. a + b = s, c, e, α' (17), dann $\sin\gamma' = \frac{c \sin(\alpha' + \beta')}{e}$.
22. a — b, c, e, α' (21). 23. a + b, d, e, α' (21).
24. a — b, d, e, α' (21).
25. a + b, e, f, α' (17), dann $\sin\alpha = \frac{f \sin(\alpha' + \beta')}{e}$.
26. a — b, e, f, α' (25).
27. a + b = s, c, d, e. Aufl. Nach Berechnung von γ' und δ' findet man $r = \frac{e}{2 \sin(\gamma' + \delta')}$, $\sin\alpha' + \sin\beta' = \frac{s}{2r}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \gamma' - \delta'$ (§. 4, 1).
28. a — b, c, d, e (27).
29. a + b, c + d, α', β' (7), zurückzuführen auf (3).
30. a — b, c + d, α', β' (29).
31. a + b, c — d, α', β' (29), auf (4) zurückzuführen.
32. a — b, c — d, α', β' (31).
33. a + b = s, c + d = s', r, β. Aufl. $\sin\alpha' + \sin\beta' = \frac{s}{2r}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$, $\sin\gamma' + \sin\delta' = \frac{s'}{2r}$, $\gamma' + \delta' = \beta$ (§. 4, 1).
34. a + b, c — d, r, β (33). 35. a — b, c — d, r, β (33).
36. a + b = s, c + d = s', e, α'. Aufl. wie 17, dann $\sin\gamma' + \sin\delta' = \frac{s'}{2r} = \frac{s' \sin\alpha'}{a}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§. 4, 1).
37. a — b, c + d, e, α' (36). 38. a + b, c — d, e, α' (36).
39. a — b, c — d, e, α' (36).
40. a, b, $\alpha' - \beta'$, γ'. Aufl. $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{a}{b}$ (§. 7, 2).
41. a, b, α, ε. Aufl. $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{a}{b}$, $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$ (§. 7, 2).
42. a, b, c, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 40; dann $\sin\gamma' = \frac{c \sin\alpha'}{a}$.
43. a, b, f, $\alpha' - \beta'$ (42).
44. a, b, c + d = s, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 40; $\sin\gamma' + \sin\delta' = \frac{s \sin\alpha'}{a}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§. 4, 1).
45. a, b, c — d, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 44.
46. a + b = s, e, $\alpha' - \beta' = \tau$, γ'. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \frac{e \cos \frac{1}{2}\tau}{s}$.

47. $a - b, e, \alpha' - \beta', \gamma'$ (46).

48. $a + b = s, e, \varepsilon, \alpha$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\beta = \frac{e \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)}{s}$.

49. $a - b = s, e, \varepsilon, \alpha$ (48).

50. $a+b=s, c, e, \alpha'-\beta'=\tau$. Aufl. wie 46; dann $\sin \gamma' = \frac{c \sin(\alpha'+\beta')}{e}$.

51. $a - b, c, e, \alpha' - \beta'$ (50).

52. $a+b=s, e, f, \alpha'-\beta'=\tau$. Aufl. wie 46; dann $\sin \alpha = \frac{f \sin(\alpha'+\beta')}{e}$.

53. $a - b, e, f, \alpha' - \beta'$ (52).

54. $a + b = s, c + d = s', e, \alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. wie 46; dann $\sin \gamma' + \sin \delta' = \frac{s' \sin(\alpha' + \beta')}{e}, \gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§. 4, 1).

55. $a + b, c - d, e, \alpha' - \beta'$ (54). 56. $a - b, c + d, e, \alpha' - \beta'$ (54).

57. $a - b, c - d, e, \alpha' - \beta'$ (54).

58. $a + b = s, r, \alpha' - \beta' = \tau, \gamma'$. Aufl. $\sin \alpha' + \sin \beta' = \frac{s}{2r}$ (§. 4, 2).

59. $a - b, r, \alpha' - \beta', \gamma'$ (58), (§. 4, 4).

60. $a + b = s, r, \alpha, \varepsilon$. Aufl. $\sin \alpha' + \sin \beta' = \frac{s}{2r}, \alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$ (§. 4, 2).

61. $a - b, r, \alpha, \varepsilon$ (60).

62. $a + b = s, c + d = s', r, \alpha' - \beta' = \tau$ (58; 3).

63. $a + b, c - d, r, \alpha' - \beta'$ (62). 64. $a - b, c + d, r, \alpha' - \beta'$ (62).

65. $a - b, c - d, r, \alpha' - \beta'$ (62).

66. $a, b, \beta, c^2 - d^2 = g^2$. Aufl. wie (1), dann $\sin \gamma'^2 - \sin \delta'^2 = \frac{g^2}{4r^2} = \frac{g^2 \sin \alpha'^2}{a^2}, \gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§. 5, 3).

67. $a, e, \beta', c^2 - d^2$ (5; 66). 68. $a, b, e, c^2 - d^2$ (66).

69. $a^2 - b^2 = g^2, r, \gamma', \delta'$. Aufl. $\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2 = \frac{g^2}{4r^2}, \alpha' + \beta' = \pi - \gamma' - \delta'$ (§. 5, 3).

70. $a + b, \alpha', \beta', c^2 - d^2$ (7; 66).

71. $a - b, \alpha', \beta', c^2 - d^2$ (70).

72. $a, b, c^2 - d^2, \alpha' - \beta'$ (40; 66).

73. $a + b, e, c^2 - d^2, \alpha' - \beta'$ (46; 66).

74. $a - b, e, c^2 - d^2, \alpha' - \beta'$ (73).

75. $a + b, c^2 - d^2, r, \alpha' - \beta'$ (58; 66).

76. $a - b, c^2 - d^2, r, \alpha' - \beta'$ (75).

77. $a^2 - b^2 = g^2, \alpha', \beta', \gamma'$. Aufl. $r = \frac{g}{2\sqrt{\sin(\alpha' + \beta') \sin(\alpha' - \beta')}}$.

78. $a^2 - b^2 = g^2, c, \alpha', \beta'$, (77). 80. $a^2 - b^2, c + d, \alpha', \beta'$ (77; 3).
79. $a^2 - b^2 = g^2, f, \alpha', \beta'$ (77). 81. $a^2 - b^2, c - d, \alpha', \beta'$ (80).
82. $a^2 - b^2 = g^2, r, \alpha, \beta$. Aufl. $\sin\alpha'^2 - \sin\beta'^2 = \frac{g^2}{4r^2}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (§. 5, 3).
83. $a^2 - b^2 = g^2, r, \beta, \varepsilon$ (82).
84. $a^2 - b^2 = g^2, c + d = s, r, \beta$, (82; 3).
85. $a^2 - b^2 = g^2, c - d = s, r, \beta$ (84).
86. $a^2 - b^2 = g^2, e, \alpha', \gamma'$. Aufl. $\frac{\sin(\alpha' - \beta')}{\sin(\alpha' + \beta')} = \frac{g^2}{e^2}$ (§. 7, 1).
87. $a^2 - b^2, e, \alpha', \delta'$ (86). 89. $a^2 - b^2, e, f, \alpha'$ (86).
88. $a^2 - b^2, c, e, \alpha'$ (86). 90. $a^2 - b^2, d, e, \alpha'$ (88).
91. $a^2 - b^2 = g^2, c + d = s, e, \alpha'$ (86; 3).
92. $a^2 - b^2, c - d, e, \alpha'$ (91).
93. $a^2 - b^2 = g^2, r, \alpha' - \beta', \gamma'$. Aufl. $\sin\alpha'^2 - \sin\beta'^2 = \frac{g^2}{4r^2}$ (§. 5, 4).
94. $a^2 - b^2 = g^2, r, \varepsilon, \alpha$. Aufl. $\sin\alpha'^2 - \sin\beta'^2 = \frac{g^2}{4r^2}$, $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$ (§. 5, 4)
95. $a^2 - b^2 = g^2, c + d = s, r, \alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. wie 93, dann $\sin\gamma' + \sin\delta' = \frac{s}{2r}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$.
96. $a^2 - b^2, c - d, r, \alpha' - \beta'$ (95).
97. $a^2 - b^2 = g^2, e, \alpha' - \beta' = \tau, \gamma'$. Aufl. $\sin(\alpha' + \beta') = \frac{e^2 \sin\tau}{g^2}$.
98. $a^2 - b^2 = g^2, e, \varepsilon, \alpha$. Aufl. $\sin(\alpha' + \beta') = \frac{e^2 \sin(\varepsilon - \alpha)}{g^2}$ und $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$.
99. $a^2 - b^2 = g^2, c, e, \alpha' - \beta' = \tau$ (97).
100. $a^2 - b^2 = g^2, e, f, \alpha' - \beta' = \tau$ (97).
101. $a^2 - b^2 = g^2, c + d = s, e, \alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. wie 97, dann $\sin\gamma' + \sin\delta' = \frac{s \sin(\alpha' + \beta')}{e}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§. 4, 1).
102. $a^2 - b^2, c - d, e, \alpha' - \beta'$ (101).
103. $a + b, e, \alpha', c^2 - d^2 = g^2$. Aufl. wie 17, dann $\sin\gamma'^2 - \sin\delta'^2 = \frac{g^2 \sin(\alpha' + \beta')^2}{e^2}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§. 5, 3).
104. $a - b, e, \alpha', c^2 - d^2$ (103).
105. $a^2 - b^2 = g^2, c^2 - d^2 = g'^2, \alpha', \beta'$. Aufl. wie in 77; auf 69 zurückzuführen.

106. $a^2 - b^2 = g^2$, $c^2 - d^2 = g'^2$, r, β. Aufl. wie 82, dann $\sin\gamma'^2 - \sin\delta'^2 = \frac{g'^2}{4 r^2}$, $\gamma' + \delta' = \beta$ (§. 5, 3).

107. $a^2 - b^2 = g^2$, $c^2 - d^2 = g'^2$, e, α'. Aufl. wie 86, dann $\sin\gamma'^2 - \sin\delta'^2 = \frac{g'^2 \sin(\alpha' + \beta')^2}{e^2}$, $\gamma' + \delta' = \pi - \alpha' - \beta'$ (§. 5, 3).

108. $a^2 - b^2 = g^2$, $c^2 - d^2 = g'^2$, r, $\alpha' - \beta' = \tau$ (93; 69).

109. $a^2 - b^2 = g^2$, $c^2 - d^2 = g'^2$, e, $\alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. wie 97, $r = \frac{e}{2 \sin(\alpha' + \beta')}$, dann wie 69.

110. F, r, α', β'. Aufl. $\sin\alpha \sin\varepsilon = \frac{F}{2 r^2 \sin(\alpha' + \beta')}$, $\varepsilon - \alpha = \alpha' - \beta'$ (§. 6, 2).

111. F, a, b, β (1, 110).

112. F, a, e, β'. Aufl. r und β zu bestimmen wie 5, dann wie 110.

113. F, a, b, e. Aufl. nach der Berechnung von r, α', β' wie 110.

114. F, a + b, α', β' (7; 110). 116. F, a + b, r, β (13; 110).

115. F, a — b, α', β' (8; 110). 117. F, a — b, r, β (14; 110).

118. F, a + b, e, α'. Aufl. wie 17; dann $r = \frac{e}{2 \sin(\alpha' + \beta')}$, zuletzt wie 110.

119. F, a — b, e, α' (118).

120. F, a, b, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 40, dann $r = \frac{a}{2 \sin\alpha'}$, und zuletzt wie 110.

121. F, a + b, r, $\alpha' - \beta'$ (58; 110). 122. F, a — b, r, $\alpha' - \beta'$ (59; 110).

123. F, a + b, e, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 46, $r = \frac{e}{2 \sin(\alpha' + \beta')}$, dann wie 110.

124. F, a — b, e, $\alpha' - \beta'$ (123). 125. F, $a^2 - b^2$, α', β' (77; 110).

126. F, $a^2 - b^2$, r, β (82; 110).

127. F, $a^2 - b^2$, e, α'. Aufl. wie 86; $r = \frac{e}{2 \sin(\alpha' + \beta')}$, dann wie 110.

128. F, $a^2 - b^2$, r, $\alpha' - \beta'$ (93; 110).

129. F, $a^2 - b^2$, e, $\alpha' - \beta'$. Aufl. wie 97; $r = \frac{e}{\sin(\alpha' + \beta')}$, dann wie 110.

b) Wegen der Gleichung $a = 2 r \sin\alpha'$ läßt sich aus zweien der Stücke a, r, α' auch das dritte berechnen. Etwas Aehnliches findet auch für die anderen Seiten statt, ebenso auch für die Diagonalen, da z. B.

$e = 2r \sin\beta$ ist. Die folgenden Aufgaben lassen sich dadurch leicht auf die vorhergehenden zurückführen, wie auch durch die jedesmal hinzugefügte Nummer angedeutet ist.

130. $c + d, a, \alpha', \beta'$ (3)
131. $c - d, a, \alpha', \beta'$ (4)
132. $a, b, c + d, \alpha'$ (3)
133. $a, b, c - d, \alpha'$ (4)
134. $a, e, c + d, \alpha'$ (3)
135. $a, e, c - d, \alpha'$ (4)
136. $a, b, r, c + d$ (3)
137. $a, b, r, c - d$ (4)
138. $a + b, e, \gamma', \delta'$ (7, 3)
139. $a - b, e, \gamma', \delta'$ (8, 4)
140. $a + b, e, \alpha, \beta$ (13)
141. $a - b, e, \alpha, \beta$ (14)
142. $a + b, f, \alpha, \beta$ (13)
143. $a - b, f, \alpha, \beta$ (14)
144. $a + b, e, \beta, \varepsilon$ (15)
145. $a - b, e, \beta, \varepsilon$ (16)
146. $a + b, c, r, \beta$ (3)
147. $a - b, c, r, \beta$ (4)
148. $a + b, f, r, \beta$ (13)
149. $a - b, f, r, \beta$ (14)
150. $a + b, e, r, \gamma'$ (3)
151. $a - b, e, r, \gamma'$ (4)
152. $a + b, e, r, \alpha$ (13)
153. $a - b, e, r, \alpha$ (14)
154. $a + b, e, r, \varepsilon$ (15)
155. $a - b, e, r, \varepsilon$ (16)
156. $a + b, c, e, r$ (3)
157. $a - b, c, e, r$ (4)
158. $a + b, e, f, r$ (13)
159. $a - b, e, f, r$ (14)
160. $a + b, c, e, \beta$ (3)
161. $a - b, c, e, \beta$ (4)
162. $a + b, e, f, \beta$ (13)
163. $a - b, e, f, \beta$ (14)
164. $a + b, e, f, \alpha$ (13)
165. $a - b, e, f, \alpha$ (14)
166. $a, r, c + d, \beta'$ (3)
167. $a, r, c - d, \beta'$ (4)
168. $a + b, c + d, e, r$ (33)
169. $a + b, c - d, e, r$ (34)
170. $a - b, c - d, e, r$ (35)
171. $a + b, c + d, e, \beta$ (33)
172. $a + b, c - d, e, \beta$ (34)
173. $a - b, c - d, e, \beta$ (35)
174. $a + b, c, r, \alpha' - \beta'$ (58)
175. $a - b, c, r, \alpha' - \beta'$ (59)
176. $a + b, f, r, \alpha' - \beta'$ (60)
177. $a - b, f, r, \alpha' - \beta'$ (61)
178. $a + b, f, r, \varepsilon$ (60)
179. $a - b, f, r, \varepsilon$ (61)
180. $a + b, f, \alpha, \varepsilon$ (60)
181. $a - b, f, \alpha, \varepsilon$ (61)
182. $c^2 - d^2, a, \alpha', \beta'$ (69, 66)
183. $c^2 - d^2, a, b, \alpha'$ (69, 66)
184. $c^2 - d^2, a, e, \alpha'$ (69, 66)
185. $c^2 - d^2, a, b, r$ (69, 66)
186. $c^2 - d^2, a, r, \beta'$ (69, 66)
187. $a^2 - b^2, c, r, \beta$ (69)
188. $a^2 - b^2, f, r, \beta$ (82)
189. $a^2 - b^2, e, r, \gamma'$ (69)
190. $a^2 - b^2, e, r, \alpha$ (82)
191. $a^2 - b^2, e, r, \varepsilon$ (83)
192. $a^2 - b^2, c, e, r$ (69)
193. $a^2 - b^2, e, f, r$ (82)
194. $a^2 - b^2, e, \gamma', \delta'$ (69)
195. $a^2 - b^2, e, \alpha, \beta$ (82)
196. $a^2 - b^2, e, \beta, \varepsilon$ (83)
197. $a^2 - b^2, c, e, \beta$ (69)
198. $a^2 - b^2, e, f, \beta$ (82)
199. $a^2 - b^2, e, f, \alpha$ (82)
200. $a^2 - b^2, c, r, \alpha' - \beta'$ (93)
201. $a^2 - b^2, f, r, \alpha' - \beta'$ (94)
202. $a^2 - b^2, f, \alpha, \beta$ (82)
203. $a^2 - b^2, f, \alpha, \varepsilon$ (94)
204. $a^2 - b^2, f, r, \varepsilon$ (94)
205. $a^2 - b^2, c + d, e, \beta$ (84)

206. $a^2 - b^2$, $c - d$, e, β (85)
207. $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, e, β (106)
208. $a^2 - b^2$, $c + d$, e, r (84)
209. $a^2 - b^2$, $c - d$, e, r (85)
210. $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, e, r (106)
211. F, a, α', β' (110)
212. F, e, α', β' (110)
213. F, a, b, α' (110)
214. F, a, e, β (110)
215. F, a, e, α' (110)
216. F, e, r, α' (110)
217. F, a, r, β (110)
218. F, a, b, r (110)
219. F, a, e, r (110)
220. F, a, r, β' (110)
221. F, $a + b$, e, β (116)
222. F, $a - b$, e, β (117)
223. F, $a + b$, e, r (116)
224. F, $a - b$, e, r (117)
225. F, $a^2 - b^2$, e, β (126)
226. F, $a^2 - b^2$, e, r (126).

c) Durch r, a und c sind auch α' und γ', mithin auch $\varepsilon = \alpha' + \gamma'$ und $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ gegeben. Es können also höchstens nur je drei von diesen Stücken unabhängig von einander sein, und sind drei solche unabhängige Stücke gegeben, so lassen sich die anderen daraus berechnen. Anstatt einzelner Stücke können auch Aggregate derselben gegeben sein. Ist z. B. $a + c$, r, $\alpha + \beta$ gegeben, so kann man a, c, α', γ', ε daraus berechnen. Das eben Gesagte gilt in derselben Weise auch von den Größen r, b, d, β', δ', $\varepsilon = \pi - (\beta' + \delta')$, $\alpha - \beta = \beta' - \delta'$.

227. a, c, β', δ'. Aufl. $\frac{\sin\alpha'}{\sin\gamma'} = \frac{a}{c}$, $\alpha' + \gamma' = \pi - \beta' - \delta'$ (§. 7, 1).

228. a, c, α, ε. Aufl. $\frac{\sin\alpha'}{\sin\gamma'} = \frac{a}{c}$, $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ (§. 7, 1).

229. a, b, c, ε (228).
230. a, c, f, ε (228).

231. r, $f + e = s$, α', γ'. Aufl. $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{s}{2r}$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§. 4, 1).

232. r, $f - e$, α', γ' (231), (§. 4, 3).

233. a, c, $b + d = s$, ε. Aufl. wie 228. $r = \frac{a}{2\sin\alpha'}$, dann

$$\sin\beta' + \sin\delta' = \frac{s}{2r} = \frac{s\sin\alpha'}{a},\ \beta' + \delta' = \pi - \varepsilon \text{ (§. 4, 1).}$$

234. a, c, $b - d$, ε (233).

235. a, c, $f + e = s$, ε. 1. Aufl. 228, 231. 2. Aufl. (228); $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{s \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{a + c}$.

236. a, c, $f - e = g$, ε. 1. Aufl. wie 228 und 232. 2. Aufl. (228); $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{g \cos \frac{1}{2}\varepsilon}{a - c}$.

237. $a + c = s, \alpha', \beta', \gamma'$. Aufl. $r = \frac{s}{2(\sin\alpha' + \sin\gamma')}$.
238. $a - c = g, \alpha', \beta', \gamma'$ (237).
239. $a + c = s, b, \alpha', \gamma'$ (237).
240. $a - c, b, \alpha', \gamma'$ (239).
241. $a + c = s, f, \alpha', \gamma'$ (237).
242. $a - c = g, f, \alpha', \gamma'$ (241).

243. $a + c = s, r, \beta', \delta'$. Aufl. $\sin\alpha' + \sin\gamma' = \frac{s}{2r}$, $\alpha' + \gamma' = \varepsilon = \pi - \beta' - \delta'$ (§. 4, 1).
244. $a - c, r, \beta', \delta'$ (243).
245. $a + c, r, \alpha, \varepsilon$ (243).
246. $a - c, r, \alpha, \varepsilon$ (244).

247. a, c, α, β. Aufl. $\frac{\sin\alpha'}{\sin\gamma'} = \frac{a}{c}$, $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ (§. 7, 2).
248. $a, b, c, \alpha + \beta$ (247).
249. $a, b, d, \alpha - \beta$ (248).
250. $a, c, \beta', \alpha + \beta$ (247).
251. $b, d, \alpha', \alpha - \beta$ (247).
252. $a, c, f, \alpha + \beta$ (247).
253. $b, d, f, \alpha - \beta$ (252).
254. $a, c, b + d = s, \alpha + \beta = \sigma$. Aufl. wie 247, dann $\sin\beta' + \sin\delta' = \frac{s \sin\alpha'}{a}$, $\beta' + \delta' = \pi - \alpha' - \gamma'$ (§. 4, 1).
255. $a, c, b - d, \alpha + \beta$ (254).
256. $b, d, a + c, \alpha - \beta$ (254).
257. $b, d, a - c, \alpha - \beta$ (254).
258. $a, c, f + e = s, \alpha + \beta$ (247, 231)
259. $a, c, f - e, \alpha + \beta$ (258).
260. $b, d, f + e, \alpha - \beta$ (258).
261. $b, d, f - e, \alpha - \beta$ (258).

262. $a + c = s, r, \alpha, \beta$. Aufl. $\sin\alpha' + \sin\gamma' = \frac{s}{2r}$, $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ (§. 4, 2).
263. $a - c, r, \alpha, \beta$ (262).
264. $a + c, r, \beta', \alpha + \beta$ (262).
265. $a - c, r, \beta', \alpha + \beta$ (252).
266. $b + d, r, \alpha', \alpha - \beta$ (262).
267. $b - d, r, \alpha', \alpha - \beta$ (262).
268. $a + c, b + d, \alpha', \gamma'$ (237, 243).
269. $a - c, b + d, \alpha', \gamma'$ (268).
270. $a + c, b - d, \alpha', \gamma'$ (268).
271. $a - c, b - d, \alpha', \gamma'$ (268).
272. $a + c = s, f + e = s', \alpha', \gamma'$ (237, 231).
273. $a + c, f - e, \alpha', \gamma'$ (272).
274. $a - c, f + e, \alpha', \gamma'$ (272).
275. $a - c, f - e, \alpha', \gamma'$ (272).
276. $a + c = s, b + d = s', r, \varepsilon$ (243, 233).
277. $a + c, b - d, r, \varepsilon$ (276).
278. $a - c, b - d, r, \varepsilon$ (276).
279. $a + c = s, f + e = s', r, \varepsilon$. 1. Aufl. (243, 231). 2. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{s' \sin \frac{1}{2}\varepsilon}{s}$, wodurch β' und δ' gefunden wird, dann wie 243.
280. $a + c, f - e, r, \varepsilon$ (279).
281. $a - c, f + e, r, \varepsilon$ (279).

282. $a - c = g, f - e = g', r, \varepsilon$. 1. Aufl. (279, 1). 2. Aufl. (244); $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{g' \cos \frac{1}{2}\varepsilon}{g}$.

283. $a + c, b + d, r, \alpha + \beta$ (262, 254).

284. $a - c = g, b + d = s, r, \alpha + \beta = \sigma$. 1. Aufl. (283). 2. Aufl. (263), dann $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{s \cos \sigma}{g}$.

285. $a - c, b - d, r, \alpha + \beta$ (283). 286. $a + c, b + d, r, \alpha - \beta$ (283).

287. $a - c = g, b + d = s, r, \alpha - \beta = \tau$. 1. Aufl. (283). 2. Aufl. (266); $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{g \cos \frac{1}{2}\tau}{s}$.

288. $a - c, b - d, r, \alpha - \beta$ (283).

289. $b^2 - d^2 = g^2, a, c, \varepsilon$. Aufl. wie 228, dann $\sin \beta'^2 - \sin \delta'^2 = \frac{g^2}{4 r^2} = \frac{g^2 \sin \alpha'^2}{a^2}$, $\beta' + \delta' = \pi - \varepsilon$ (§. 5, 3).

290. $f^2 - e^2 = g^2, a, c, \varepsilon$. 1. Aufl. wie 228, $\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 = \frac{g^2}{4 r^2} = \frac{g^2 \sin \alpha'^2}{a^2}$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§. 5, 3). 2. Aufl. wie 228, $\sin (\alpha - \beta) = \frac{g^2 \sin \varepsilon}{a^2 - c^2}$.

291. $a + c = s, b^2 - d^2 = g^2, \alpha', \gamma'$ (237, 289).

292. $a - c, b^2 - d^2, \alpha', \gamma'$ (291).

293. $a + c = s, f^2 - e^2 = g^2, \alpha', \gamma'$ (237, 290).

294. $a - c, f^2 - e^2, \alpha', \gamma'$ (293).

295. $a + c = s, f^2 - e^2 = g^2, r, \varepsilon$ (243, 290).

296. $a - c, f^2 - e^2, r, \varepsilon$ (295).

297. $b^2 - d^2 = g^2, a, c, \alpha + \beta$. 1. Aufl. (247, 289). 2. Aufl. (247), dann $\sin (\alpha - \beta) = \frac{g^2 \sin (\alpha + \beta)}{a^2 - c^2}$.

298. $f^2 - e^2 = g^2, a, c, \alpha + \beta$. Aufl. (247). $\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 = \frac{g^2}{4 r^2} = \frac{g^2 \sin \alpha'^2}{a^2}$ (§. 5, 3).

299. $a^2 - c^2, b, d, \alpha - \beta$ (297). 300. $f^2 - e^2, b, d, \alpha - \beta$ (298).

301. $a + c, b^2 - d^2, r, \alpha + \beta$ (262, 289).

302. $a - c, b^2 - d^2, r, \alpha + \beta$ (301). 303. $a^2 - c^2, b + d, r, \alpha - \beta$ (301).

304. $a^2 - c^2, b - d, r, \alpha - \beta$ (301).

305. $a^2 - c^2 = g^2, \alpha', \beta', \gamma'$. Aufl. $r = \frac{g}{2 \sqrt{\sin (\alpha' + \gamma') \sin (\alpha' - \gamma')}}$.

306. $a^2 - c^2 = g^2, b, \alpha', \gamma'$ (305). 307. $a^2 - c^2 = g^2, f, \alpha', \gamma'$ (305).

308. $a^2 - c^2 = g^2, r, \alpha, \varepsilon$. Aufl. $\sin \alpha'^2 - \sin \gamma'^2 = \frac{g^2}{4 r^2}$, $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$, dann 305.

309. $a^2 - c^2$, r, β', δ' (308).
310. $a^2 - c^2$, $b + d$, α', γ' (305, 233).
311. $a^2 - c^2$, $b - d$, α', γ' (310).
312. $a^2 - c^2$, $f + e$, α', γ' (305, 231).
313. $a^2 - c^2$, $f - e$, α', γ' (312).
314. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, α', γ' (305, 309).
315. $a^2 - c^2 = g^2$, $f^2 - e^2 = g'^2$, α', γ'. 1. Aufl. (305, 290).
2. Aufl. (305), dann $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g'^2 \sin\varepsilon}{g^2}$.
316. $a^2 - c^2$, $b + d$, r, ε (308, 233).
317. $a^2 - c^2$, $b - d$, r, ε (316).
318. $a^2 - c^2$, $f + e$, r, ε (308, 231).
319. $a^2 - c^2$, $f - e$, r, ε (318).
320. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, r, ε (308).
321. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, r, ε (308, 290).
322. $a^2 - c^2 = g^2$, r, α, β. Aufl. $\sin\alpha'^2 - \sin\gamma'^2 = \frac{g^2}{4 r^2}$, $\alpha' - \gamma'$ $= \pi - (\alpha + \beta)$ (§. 5, 3).
323. $a^2 - c^2$, r, β', $\alpha + \beta$ (322).
324. $a^2 - c^2$, $b + d$, r, $\alpha + \beta$ (322, 243).
325. $a^2 - c^2$, $b - d$, r, $\alpha + \beta$ (324).
326. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, r, $\alpha + \beta$, 1. Aufl. (322, 297).
2. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g'^2 \sin(\alpha + \beta)}{g^2}$ und (322).
327. $b^2 - d^2$, r, α', $\alpha - \beta$ (323).
328. $b^2 - d^2$, $a + c$, r, $\alpha - \beta$ (324).
329. $b^2 - d^2$, $a - c$, r, $\alpha - \beta$ (324).
330. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, r, $\alpha - \beta$ (326).
331. F, r, α', γ'. Aufl. $\sin\alpha \sin\beta = \frac{F}{2 r^2 \sin\varepsilon} = \frac{F}{2 r^2 \sin(\alpha' + \gamma')}$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§. 6, 1).
332. F, a, c, ε (228, 331)
333. F, a, c, $\alpha + \beta$ (247, 332)
334. F, b, d, $\alpha - \beta$ (333)
335. F, $a + c$, α', γ' (237, 331)
336. F, $a - c$, α', γ' (335).
337. F, $a + c$, r, ε (243, 331)
338. F, $a - c$, r, ε (337)
339. F, $a + c$, r, $\alpha + \beta$ (262, 331)
340. F, $a - c$, r, $\alpha + \beta$ (339)
341. F, $b + d$, r, $\alpha - \beta$ (339)
342. F, $b - d$, r, $\alpha - \beta$ (339)
343. F, $a^2 - c^2$, α', γ' (305, 331)
344. F, $a^2 - c^2$, r, ε (308, 331)
345. F, $a^2 - c^2$, r, $\alpha + \beta$ (322, 331)
346. F, $b^2 - d^2$, r, $\alpha - \beta$ (345).

d) Die folgenden Aufgaben lassen sich auf ähnliche Weise leicht auf c) zurückführen, wie die unter b) auf die unter a) zurückgeführt wurden.

347. a, $b + d$, α', γ' (243)
348. a, $b - d$, α', γ' (244)
349. a, $f + e$, α', γ' (231)
350. a, $f - e$, α', γ' (232)
351. $f + e$, a, c, α' (231)
352. $f - e$, a, c, α' (232)
353. $b + d$, a, c, α' (243)
354. $b - d$, a, c, α' (244)
355. $b + d$, a, c, r (243)
356. $b - d$, a, c, r (244)

357. $f + e, a, c, r$ (231)
358. $f - e, a, c, r$ (232)
359. $a + c, b, r, \varepsilon$ (243)
360. $a - c, b, r, \varepsilon$ (244)
361. $a + c, f, r, \varepsilon$ (245)
362. $a - c, f, r, \varepsilon$ (246)
363. $a + c, f, \alpha, \varepsilon$ (245)
364. $a - c, f, \alpha, \varepsilon$ (246)
365. $a + c, b, r, \alpha + \beta$ (264)
366. $a - c, b, r, \alpha + \beta$ (265)
367. $b + d, a, r, \alpha - \beta$ (266)
368. $b - d, a, r, \alpha - \beta$ (267)
369. $a + c, b, \beta', \alpha + \beta$ (264)
370. $a - c, b, \beta', \alpha + \beta$ (265)
371. $b + d, a, \alpha', \alpha - \beta$ (266)
372. $b - d, a, \alpha', \alpha - \beta$ (267)
373. $b + d, a, r, \gamma'$ (243)
374. $b - d, a, r, \gamma'$ (244)
375. $f + e, a, r, \gamma'$ (231)
376. $f - e, a, r, \gamma'$ (232)
377. $b + d, r, a, \varepsilon$ (243)
378. $b - d, r, a, \varepsilon$ (244)
379. $f + e, r, a, \varepsilon$ (231)
380. $f - e, r, a, \varepsilon$ (232)
381. $a + c, r, f, \beta$ (262)
382. $a - c, r, f, \beta$ (263)
383. $a + c, f, \alpha, \beta$ (262)
384. $a - c, f, \alpha, \beta$ (263)
385. $a + c, r, e, f$ (262)
386. $a - c, r, e, f$ (263)
387. $a + c, e, f, \alpha$ (262)
388. $a - c, e, f, \alpha$ (263)
389. $a^2 - c^2, b, r, \varepsilon$ (309)
390. $a^2 - c^2, f, r, \varepsilon$ (308)
391. $a^2 - c^2, f, a, \varepsilon$ (308)
392. $a^3 - c^2, r, f, \beta$ (322)
393. $a^2 - c^2, r, e, f$ (322)
394. $a^2 - c^2, e, f, \alpha$ (322)
395. $a^2 - c^2, f, \alpha, \beta$ (322)
396. $a^2 - c^2, b, r, \alpha + \beta$ (323)
397. $a^2 - c^2, b, \beta', \alpha + \beta$ (323)
398. $a^2 - c^2, b, r, \alpha - \beta$ (309)
399. $a^2 - c^2, b, \beta', \alpha - \beta$ (309)
400. $b^2 - d^2, a, \alpha', \gamma'$ (309)
401. $f^2 - e^2, a, \alpha', \gamma'$ (290)
402. $b^2 - d^2, a, c, \alpha'$ (309)
403. $f^2 - e^2, a, c, \alpha'$ (290)
404. $b^2 - d^2, a, c, r$ (309)
405. $f^2 - e^2, a, c, r$ (290)
406. $b^2 - d^2, a, r, \gamma'$ (309)
407. $f^2 - e^2, a, r, \gamma'$ (290)
408. $b^2 - d^2, a, r, \varepsilon$ (309)
409. $f^2 - e^2, a, r, \varepsilon$ (290)
410. F, a, α', γ' (331)
411. F, a, c, α' (331)
412. F, a, c, r (331)
413. F, a, r, γ' (331)
414. F, a, r, ε (331).

e) Durch r, e und f sind auch β und α, mithin auch $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ und $\beta' - \delta' = \alpha - \beta$ gegeben. Es können also nur höchstens je drei dieser Stücke von einander unabhängig sein, und sind drei solche unabhängigen Stücke gegeben, so lassen sich alle anderen Stücke daraus berechnen. Anstatt einzelner Stücke können Aggregate derselben gegeben sein. Ist z. B. $f + e, r, \alpha \pm \beta$ oder $f^2 - e^2, r, \alpha \pm \beta$ gegeben, so kann man f, e, r, α, β daraus berechnen.

415. e, f, α', γ'. Aufl. $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{e}{f}$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§. 7, 1).

416. $a, e, f, \alpha + \beta = \sigma$. Aufl. wie 415, $\sin\alpha' = \frac{a \sin\beta}{e}$.

417. a, e, f, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{e}{f}$ (§. 7, 2), $\sin\alpha' = \frac{a \sin\beta}{e}$.

418. $f + e = s$, α', β', γ'. Aufl. $r = \frac{s}{4 \cos\frac{1}{2}(\alpha' - \gamma') \cos\frac{1}{2}(\beta' - \delta')}$
$= \frac{s}{4 \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$.

419. $f - e$, α', β', γ' (418).

420. $f + e$, a, α, β (418).

421. $f - e$, a, α, β (419).

422. $f + e = s$, r, α', γ'. Aufl. $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{s}{2r}$, $\alpha + \beta$
$= \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§. 4, 1).

423. $f - e$, r, α', γ' (422)

424. $f + e$, r, β', $\alpha + \beta$ (422)

425. $f - e$, r, β', $\alpha + \beta$ (422)

426. $f + e$, r, α', $\alpha - \beta$ (422)

427. $f - e$, r, α', $\alpha - \beta$ (422)

428. $f + e$, a, r, $\alpha + \beta$ (422)

429. $f - e$, a, r, $\alpha + \beta$ (428)

430. $f + e$, a, r, $\alpha - \beta$ (428)

431. $f - e$, a, r, $\alpha - \beta$ (428).

432. $a + c = s$, e, f, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. wie 415; $\sin\alpha' + \sin\gamma' = \frac{s}{2r}$
$= \frac{s \sin\alpha}{f}$, $\alpha' - \gamma' = \pi - \sigma$ (§. 4, 2).

433. $a - c$, e, f, $\alpha + \beta$ (432).

434. $a + c$, e, f, $\alpha - \beta$. 1. Aufl. (432). 2. Aufl. wie 415;
$\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{(a + c) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{f + e}$.

435. $a - c$, e, f, $\alpha - \beta$ (432).

436. $a + b = s$, e, f, $\alpha + \beta$. Aufl. wie 415; $\sin\alpha' + \sin\beta' = \frac{s}{2r}$
$= \frac{s \sin\beta}{e}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (§. 4, 1).

437. $a - b$, e, f, $\alpha + \beta$ (436)

438. $a + b$, e, f, $\alpha - \beta$ (436)

439. $a - b$, e, f. $\alpha - \beta$ (436)

440. $a + c$, $e + f$, α, β (418, 432)

441. $a - c$, $f + e$, α, β (440)

442. $a + c$, $f - e$, α, β (440)

443. $a - c$, $f - e$, α, β (440)

444. $a + b$, $f + e$, α, β (418, 13)

445. $a - b$, $f + e$, α, β (444)

446. $a + b$, $f - e$, α, β (444)

447. $a - b$, $f - e$, α, β (444).

448. $a + b$, $f + e$, r, $\alpha + \beta$ (422, 13).

449. $a - b$, $f + e$, r, $\alpha + \beta$ (448)

450. $a + b$, $f - e$, r, $\alpha + \beta$ (448)

451. $a - b$, $f - e$, r, $\alpha + \beta$ (448)

452. $a + b$, $f + e$, r, $\alpha - \beta$ (448)

453. $a - b$, $f + e$, r, $\alpha - \beta$ (448)

454. $a + b$, $f - e$, r, $\alpha - \beta$ (448)

455. $a - b$, $f - e$, r, $\alpha - \beta$ (448).

456. $a + c$, $f + e$, r, $\alpha + \beta$ (422, 262).

457. $a - c, f + e, r, \alpha + \beta$ (456) 461. $a - c, f + e, r, \alpha - \beta$ (456)
458. $a + c, f - e, r, \alpha + \beta$ (456) 462. $a + c, f - e, r, \alpha - \beta$ (456)
459. $a - c, f - e, r, \alpha + \beta$ (456) 463. $a - c, f - e, r, \alpha - \beta$ (456).
460. $a + c, f + e, r, \alpha - \beta$ (456)

464. $a^2 - b^2 = g^2, e, f, \alpha + \beta$. Aufl. wie 415; $\sin\alpha'^2 - \sin\beta'^2 = \frac{g^2}{4 r^2} = \frac{g^2 \sin\beta^2}{e^2}$, $\alpha' + \beta' = \pi - \beta$ (§. 5, 3).

465. $a^2 - b^2, e, f, \alpha - \beta$ (464).

466. $a^2 - c^2 = g^2, e, f, \alpha + \beta$. Aufl. wie 415; $\sin\alpha'^2 - \sin\gamma'^2 = \frac{g^2}{4 r^2} = \frac{g^2 \sin\beta^2}{e^2}$, $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ (§. 5, 4).

467. $a^2 - c^2, e, f, \alpha - \beta$ (466) 470. $a^2 - c^2, f + e, \alpha, \beta$ (418, 322)
468. $a^2 - b^2, f + e, \alpha, \beta$ (418, 82) 471. $a^2 - c^2, f - e, \alpha, \beta$ (470).
469. $a^2 - b^2, f - e, \alpha, \beta$ (468)
472. $a^2 - b^2, f + e, r, \alpha + \beta$ (422, 82).
473. $a^2 - b^2, f - e, r, \alpha + \beta$ (472) 474. $a^2 - b^2, f + e, r, \alpha - \beta$ (472)
475. $a^2 - b^2, f - e, r, \alpha - \beta$ (472).
476. $a^2 - c^2, f + e, r, \alpha + \beta$ (422, 322).
477. $a^2 - c^2, f - e, r, \alpha + \beta$ (476). 478. $a^2 - c^2, f + e, r, \alpha - \beta$ (476).
479. $a^2 - c^2, f - e, r, \alpha - \beta$ (476).

480. $f^2 - e^2 = g^2, \alpha, \beta, \varepsilon$. Aufl. $r = \frac{g}{2\sqrt{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}}$.

481. $f^2 - e^2 = g^2, a, \alpha, \beta$ (480) 485. $f^2 - e^2, a - c, \alpha, \beta$ (484)
482. $f^2 - e^2, a + b, \alpha, \beta$ (480, 13) 486. $f^2 - e^2, a^2 - b^2, \alpha, \beta$ (480, 82)
483. $f^2 - e^2, a - b, \alpha, \beta$ (482) 487. $f^2 - e^2, a^2 - c^2, \alpha, \beta$ (480, 322)
484. $f^2 - e^2, a + c, \alpha, \beta$ (480, 262)

488. $f^2 - e^2 = g^2, r, \alpha', \gamma'$. Aufl. $\sin\alpha^2 - \sin\beta^2 = \frac{g^2}{4 r^2}$, $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§. 5, 3).

489. $f^2 - e^2, r, \beta', \alpha + \beta$ (488) 492. $f^2 - e^2, a, r, \alpha - \beta$ (491)
490. $f^2 - e^2, r, \alpha', \alpha - \beta$ (488) 493. $f^2 - e^2, b, \beta', \alpha + \beta$ (489)
491. $f^2 - e^2, b, r, \alpha + \beta$ (488) 494. $f^2 - e^2, a, \alpha', \alpha - \beta$ (490)
495. $f^2 - e^2, a + b, r, \alpha + \beta$ (488, 13).
496. $f^2 - e^2, a - b, r, \alpha + \beta$ (495) 497. $f^2 - e^2, a + b, r, \alpha - \beta$ (495)
498. $f^2 - e^2, a - b, r, \alpha - \beta$ (495).
499. $f^2 - e^2, a + c, r, \alpha + \beta$ (488, 262).
500. $f^2 - e^2, a - c, r, \alpha + \beta$ (499) 501. $f^2 - e^2, a + c, r, \alpha - \beta$ (499).
502. $f^2 - e^2, a - c, r, \alpha - \beta$ (499).
503. $f^2 - e^2, a^2 - b^2, r, \alpha + \beta$ (488, 82).

504. $f^2 - e^2$, $a^2 - b^2$, r, $\alpha - \beta$ (503).
505. $f^2 - e^2$, $a^2 - c^2$, r, $\alpha + \beta$ (488, 322).
506. $f^2 - e^2 = g^2$, $a^2 - c^2 = g'^2$, r, $\alpha - \beta$. 1. Aufl. (505).
2. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{g'^2 \sin(\alpha - \beta)}{g^2}$, dann wie 480.

507. F, r, α, β. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{F}{2 r^2 \sin\alpha \sin\beta}$.
508. F, e, r, α. Aufl. wie 507. 509. F, e, α, β. Aufl. wie 507.
510. F, e, f, r. Aufl. wie 507.
511. F, e, f, $\alpha + \beta$. Aufl. wie 415, $r = \frac{e}{2 \sin\alpha}$, wie 507.
512. F, e, f, $\alpha - \beta$ (511)
513. F, f + e, α, β (418, 507)
514. F, f − e, α, β (513)
515. F, f + e, r, $\alpha + \beta$ (422, 507)
516. F, f − e, r, $\alpha + \beta$ (515)
517. F, f + e, r, $\alpha - \beta$ (515)
518. F, f − e, r, $\alpha - \beta$ (515)
519. F, $f^2 - e^2$, α, β (480, 507)
520. F, $f^2 - e^2$, r, $\alpha + \beta$ (488, 507)
521. F, $f^2 - e^2$, r, $\alpha - \beta$ (520).

f) F, e, f, ε sind von einander abhängig. Sind drei dieser Stücke gegeben, so läßt sich das vierte mittelst der Gleichung $2F = ef \sin\varepsilon$ berechnen.

522. F, e, α, ε. Aufl. $f = \frac{2F}{e \sin\varepsilon}$, $\sin\beta = \frac{e \sin\alpha}{f}$.
523. F, e, α', γ' (522, 415). 524. F, e, β, ε (522).
525. F, e, r, ε (522).
526. F, r, β, ε. Aufl. $\sin\alpha = \frac{F}{2 r^2 \sin\beta \sin\varepsilon}$.
527. F, f + e = s, α, ε. Aufl. $ef = \frac{2F}{\sin\varepsilon}$ (§. 10), dann 522.
528. F, f − e, α, ε (527). 529. F, f + e, α', γ' (527, 415).
530. F, f − e, α', γ' (529).
531. F, f + e, r, ε. Aufl. wie 527, $\sin\alpha = \frac{f}{2r}$, $\sin\beta = \frac{e}{2r}$.
532. F, f − e, r, ε (531)
533. F, $f^2 + e^2$, α, ε (527)
534. F, $f^2 - e^2$, α, ε (527)
535. F, $f^2 + e^2$, α', γ' (529)
536. F, $f^2 - e^2$, α', γ' (529)
537. F, $f^2 + e^2$, r, ε (531)
538. F, $f^2 - e^2$, r, ε (531)
539. F, e, f, α.

g) a + b, c − d, ε, α sind von einander abhängig, so daß sich aus dreien dieser Stücke das vierte berechnen läßt, da $\frac{a+b}{c-d} = -\frac{\cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)}{\cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \alpha)}$, also $\frac{(a+b)+(c-d)}{(a+b)-(c-d)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ ist. Etwas Aehnliches gilt, wenn statt ε oder α ihre Aggregate $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$, $\gamma' - \delta' = \varepsilon + \alpha - \pi$ gegeben sind.

540. $a + b = s$, $c - d = g$, α', γ'. Aufl. $-\frac{\cos {}^1/_2 (\varepsilon - \alpha)}{\cos {}^1/_2 (\varepsilon + \alpha)} = \frac{s}{g}$ (§, 7, 11), dann 7.

541. $a + b$, $c - d$, ε, β (540)
542. a, b, $c - d$, ε (540, 41)
543. $a + b$, c, d, ε (540, 41)
544. $a + b$, $c - d$, r, ε (540, 60)
545. $a + b$, $c - d$, f, ε (540, 60)
546. $a + b$, $c - d$, e, ε (541, 48).

547. $a + b = s$, $c - d = g$, α, β. Aufl. $-\frac{\cos {}^1/_2 (\varepsilon - \alpha)}{\cos {}^1/_2 (\varepsilon + \alpha)} = \frac{s}{g}$ (§. 7, 11), dann wie 7.

548. $a + b$, $c - d$, β', γ' (547)
549. a, b, $c - d$, α (547, 41)
550. $a + b$, c, d, α (547, 41)
551. $a + b$, $c - d$, r, α (547, 60)
552. $a + b$, $c - d$, f, α (547, 60)
553. $a + b$, $c - d$, r, f (552)
554. $a + b$, $c - d$, e, α (547, 48).

555. $a + b = s$, $c - d = g$, γ', $\alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. $\sin {}^1/_2 (\gamma' - \delta') = \frac{g \cos {}^1/_2 \tau}{s}$, dann wie 7.

556. $a + b$, c, d, $\alpha' - \beta'$ (555), dann ähnlich wie 41.

557. $a + b$, $c - d$, f, $\alpha' - \beta'$ (555, 60).

558. $a + b$, $c - d$, α', $\gamma' - \delta'$ (555). 559. a, b, $c - d$, $\gamma' - \delta'$ (556).

560. $a + b$, $c - d$, f, $\gamma' - \delta'$ (557).

561. $a + b = s$, c, ε, α. Aufl. $c - d = -\frac{s \cos {}^1/_2 (\varepsilon + \alpha)}{\cos {}^1/_2 (\varepsilon - \alpha)}$, dann 41.

562. $a + b = s$, $c + d = s'$, α, ε (561).

563. $a + b = s$, $c^2 - d^2 = g^2$, α, ε. 1. Aufl. (561, 562). 2. Aufl. $a - b = -\frac{g^2 \sin (\varepsilon - \alpha)}{s \sin (\varepsilon + \alpha)}$, dann wie 41.

564. $c - d$, a, α, ε (561). 565. $a - b$, $c - d$, α, ε (561).

566. $a^2 - b^2$, $c - d$, α, ε (563).

567. F, $a + b = s$, α, ε. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \beta = \frac{4 F \cos {}^1/_2 (\varepsilon - \alpha)^2}{s^2 \sin \alpha \sin \varepsilon}$, dann wie 7 oder 539.

568. F, $c - d = g$, α, ε. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1/_2 \beta = \frac{4 F \cos {}^1/_2 (\varepsilon + \alpha)^2}{g^2 \sin \alpha \sin \varepsilon}$, dann ähnlich wie 7 oder 539.

569. F, $a + b$, $c - d$, ε (540, 567). 570. F, $a + b$, $c - d$, α (547, 567).

571. F, $a + b$, $c - d$, $\alpha' - \beta'$ (555, 567).

572. F, $a + b$, $c - d$, $\gamma' - \delta'$ (571).

h) $a + c$, $b - d$, α, β sind von einander abhängig, so daß sich aus dreien dieser Stücke das vierte berechnen läßt, da $\frac{a + c}{b - d} =$

$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$, also $\frac{(a + c) + (b - d)}{(a + c) - (b - d)} = \frac{tg \frac{1}{2}\alpha}{tg \frac{1}{2}\beta}$ ist. Anstatt α und β kann auch $\alpha \pm \beta$ gegeben sein.

573. $a + c = s$, $b - d = g$, α, ε. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{s}{g}$ (§. 7, 7), dann wie 237.

574. $a + c$, $b - d$, β', γ' (573)
575. $a + c$, $b - d$, α', δ' (573)
576. $a + c$, b, d, α (573, 246)
577. a, c, $b - d$, α (576)
578. $a + c$, $b - d$, r, α (573, 261)
579. $a + c$, $b - d$, f, α. Aufl. wie 578.
580. $a + c$, $b - d$, r, f. Aufl. wie 578.
581. $a + c = s$, $b - d = g$, $f + e = s'$, α (573, 440), oder $\sin \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{s'}$.
582. $a + c$, $b - d$, $f - e$, α (581).
583. $a + c$, $b - d$, $f^2 - e^2$, α (573, 484).
584. $a + c = s$, b, α, β. Aufl. $b - d = \frac{s \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$, dann 247.
585. $a + c$, $b + d$, α, β (584, 247).
586. $a + c = s$, $b^2 - d^2 = g^2$, α, β. 1. Aufl. (584, 585). 2. Aufl. $a - c = \frac{g^2 \sin(\alpha + \beta)}{s \sin(\alpha - \beta)}$, dann wie 247.
587. $b - d$, a, α, β (584).
588. $a - c$, $b - d$, α, β (585).
589. $a^2 - c^2$, $b - d$, α, β. Aufl. ähnlich wie 586.
590. $a + c = s$, $b - d = g$, β', $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{g \sin \frac{1}{2}\sigma}{s}$, dann wie 237.
591. $a + c$, b, d, $\alpha + \beta$ (590, 247).
592. $a + c$, $b - d$, f, $\alpha + \beta$. Aufl. wie 590, $r = \frac{f}{2 \sin \alpha}$, dann wie 262.
593. $a + c = s$, $b - d = g$, $f + e = s'$, $\alpha + \beta$. Aufl. wie 590 und 440, oder $\sin \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{s \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{s'}$.
594. $a + c$, $b - d$, $f - e$, $\alpha + \beta$ (593).
595. $a + c$, $b - d$, $f^2 - e^2$, $\alpha + \beta$ (590, 484).
596. $a + c$, $b - d$, α', $\alpha - \beta$ (590).
597. a, c, $b - d$, $\alpha - \beta$ (591).
598. $a + c$, $b - d$, f, $\alpha - \beta$ (592).
599. $a + c$, $b - d$, $f + e$, $\alpha - \beta$ (593).
600. $a + c$, $b - d$, $f - e$, $\alpha - \beta$ (593).
601. $a + c$, $b - d$, $f^2 - e^2$, $\alpha - \beta$ (595).

602. $F, a + c = s, \alpha, \beta$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{s^2 \sin \alpha \sin \beta}{4 F \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)^2}$.

603. F, $b - d$, α, β (602). 604. F, $a + c$, $b - d$, α (573, 602).

605. F, $a + c$, $b - d$, $\alpha + \beta$ (590, 604).

606. F, $a + c$, $b - d$, $\alpha - \beta$ (605).

i) $a + c$, $f + e$, β', δ' sind von einander abhängig, so daß sich aus drei von diesen Stücken das vierte berechnen läßt, denn $\frac{f + e}{a + c} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\beta' - \delta')}{\cos \frac{1}{2} (\beta' + \delta')}$, und somit $\frac{(f + e) - (a + c)}{(f + e) + (a + c)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta'$. Anstatt β' und δ' kann auch $\varepsilon = \pi - (\beta' + \delta')$ oder $\alpha - \beta = \beta' - \delta'$ gegeben sein. Dieselbe Eigenschaft besitzen noch $a - c$, $f - e$, β', δ', ferner $b + d$, $f + e$, $\alpha + \beta$, ε, endlich $b - d$, $f - e$, $\alpha + \beta$, ε.

607. $a + c = s$, $f + e = s'$, α, ε. Aufl. $\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{s' \sin \frac{1}{2} \varepsilon}{s}$.

608. $a - c = g$, $f - e = g'$, α, ε. Aufl. $\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{g' \cos \frac{1}{2} \varepsilon}{g}$,

609. $a + c$, e, f, ε (607, 415). 610. $a - c$, e, f, ε (609).

611. $a + c$, $f + e$, b, ε. Aufl. wie 607, $r = \frac{b}{2 \sin \beta}$, dann wie 243.

612. $a - c$, $f - e$, b, ε (611).

613. $a + c = s$, $b + d = s'$, $f + e = s''$, ε (607), dann $\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \frac{s'' \cos \frac{1}{2} \varepsilon}{s'}$ (237, 418).

614. $a - c$, $b - d$, $f - e$, ε (613).

615. $a + c$, $b - d$, $f + e$, ε. Aufl. wie 607 und ähnlich wie 274.

616. $a - c$, $b + d$, $f - e$, ε (615).

617. $a + c$, $f + e$, $b^2 - d^2$, ε (607, 312).

618. $a - c$, $f - e$, $b^2 - d^2$, ε (617).

619. $a + c = s$, $f + e = s'$, α', $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{s \cos \frac{1}{2} \tau}{s'}$, dann (237, 418).

620. $a - c = g$, $f - e = g'$, α', $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\cos \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{g \sin \frac{1}{2} \tau}{g'}$, dann wie 238 oder 419.

621. $b + d = s$, $f + e = s'$, β', $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{s \sin \frac{1}{2} \sigma}{s'}$, dann (418, 237).

622. $b - d = g$, $f - e = g'$, β', $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{g \cos \frac{1}{2} \sigma}{g'}$, dann (419, 238).

623. $f+e, a, c, \alpha-\beta$ (619, 227). 625. $f+e, b, d, \alpha+\beta$ (621, 227).
624. $f-e, a, c, \alpha-\beta$ (620, 227). 626. $f-e, b, d, \alpha+\beta$ (622, 227).
627. $a+c, f+e, b, \alpha-\beta$ (619, 243, 231).
628. $a-c, f-e, b, \alpha-\beta$ (620, 627). 629. $b+d, f+e, a, \alpha+\beta$ (621, 627).
630. $b-d, f-e, a, \alpha+\beta$ (622, 627).
631. $a+c=s, b+d=s', f+e=s'', \alpha-\beta=\tau$. Aufl. $\sin {}^1/_2\varepsilon = \frac{s\cos {}^1/_2\tau}{s''}$, $\sin {}^1/_2(\alpha+\beta)=\frac{s''\cos {}^1/_2\varepsilon}{s'}$, dann (237, 418).
632. $a-c=g, b-d=g', f-e=g'', \alpha-\beta=\tau$. Aufl. $\cos {}^1/_2\varepsilon = \frac{g\sin {}^1/_2\tau}{g''}$, $\cos {}^1/_2(\alpha+\beta)=\frac{g''\sin {}^1/_2\varepsilon}{g'}$, dann wie 238 oder 419.
633. $a+c, b+d, f+e, \alpha+\beta$ (632). 634. $a-c, b-d, f-e, \alpha+\beta$ (633).
635. $a+c, f+e, b^2-d^2, \alpha-\beta$ (620 und 310 oder 312).
636. $a-c, f-e, b^2-d^2, \alpha-\beta$ (620, 311, 313).
637. $a^2-c^2, b+d, f+e, \alpha+\beta$ (635).
638. $a^2-c^2, b-d, f-e, \alpha+\beta$ (636).
639. $f+e=s, a, \beta', \delta'$. Aufl. $a+c=\frac{s\sin {}^1/_2\varepsilon}{\cos {}^1/_2(\alpha-\beta)}=\frac{s\cos {}^1/_2(\beta'+\delta')}{\cos {}^1/_2(\beta'-\delta')}$, dann wie 227.
640. $f-e=g, a, \beta', \delta'$. Aufl. $a-c=\frac{g\cos {}^1/_2\varepsilon}{\sin {}^1/_2(\alpha-\beta)}=\frac{g\sin {}^1/_2(\beta'+\delta')}{\sin {}^1/_2(\beta'-\delta')}$, dann wie 227.
641. $a-c=g, f+e, \beta', \delta'$. 1. Aufl. (639). 2. Aufl. $f-e=\frac{g\sin {}^1/_2(\beta'-\delta')}{\sin {}^1/_2(\beta'+\delta')}$.
642. $a^2-c^2, f+e, \beta', \delta'$. 1. Aufl. (639, 641), 2. Aufl. $f-e=\frac{(a^2-c^2)\sin(\alpha-\beta)}{(f+e)\sin\varepsilon}$.
643. $a+c=s, f-e, \beta', \delta'$. 1. Aufl. (640). 2. Aufl. $f+e=\frac{s\cos {}^1/_2(\beta'-\delta')}{\cos {}^1/_2(\beta'+\delta')}$.
644. $a^2-c^2, f-e, \beta', \delta'$. 1. Aufl. (640, 643). 2. Aufl. $f+e=\frac{(a^2-c^2)\sin(\beta'-\delta')}{(f-e)\sin\varepsilon}$.
645. $a+c=s, e, \beta', \delta'$. Aufl. $f+e=\frac{s\cos {}^1/_2(\alpha-\beta)}{\sin {}^1/_2\varepsilon}=\frac{s\cos {}^1/_2(\beta'-\delta')}{\cos {}^1/_2(\beta'+\delta')}$, dann wie 415.

646. $a - c = g, e, \beta', \delta'$. Aufl. $f - e = \frac{g \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{g \sin \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\sin \frac{1}{2}(\beta' + \delta')}$, dann wie 415.

647. $a + c = s, f^2 - e^2 = g^2, \beta', \delta'$. 1. Aufl. wie 645. 2. Aufl. $a - c = \frac{g^2 \sin(\beta' + \delta')}{s \sin(\beta' - \delta')}$, dann wie 227.

648. $a - c, f^2 - e^2, \beta', \delta'$ (647).

649. $f + e = s, a, c, \beta'$. Aufl. $\frac{\cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\beta' + \delta')} = \frac{s}{a + c}$ (§. 7, 11), dann wie 227.

650. $f - e = g, a, c, \beta'$. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\sin \frac{1}{2}(\beta' + \delta')} = \frac{g}{a - c}$ (§. 7, 7), dann wie 227.

651. $a + c = s, e, f, \beta'$ (649, 415). 652. $a - c = g, e, f, \beta'$ (650, 415).

653. $a + c, f + e, \alpha', \beta'$ (649, 237, 418).

654. $a - c, f - e, \alpha', \beta'$ (650, 238, 419).

655. $a + c, f + e, r, \beta'$ (649, 243, 422).

656. $a - c, f - e, r, \beta'$ (650, 244, 423).

657. $a + c, f + e, b, \beta'$ (655).

658. $a - c, f - e, b, \beta'$ (656).

659. $a + c, f + e, b, r$ (655).

660. $a - c, f - e, b, r$ (656).

661. $a + c, b + d, f + e, \beta'$ (649, 268, 272).

662. $a + c, b - d, f + e, \beta'$ (649, 269, 274).

663. $a - c, b + d, f - e, \beta'$ (650, 270, 273).

664. $a - c, b - d, f - e, \beta'$ (650, 271, 275).

665. $a + c, b^2 - d^2, f + e, \beta'$ (649, 310, 312).

666. $a - c, b^2 - d^2, f - e, \beta'$ (650, 311, 313).

667. $F, a + c, \beta', \delta'$ (645, 529). 668. $F, a - c, \beta' \delta'$ (646, 530).

669. $F, a + c, f + e, \varepsilon$. 1. Aufl. (607, 529). 2. Aufl. (527, 609).

670. $F, a - c, f - e, \varepsilon$. 1. Aufl. (608, 530). 2. Aufl. (528, 610).

671. $F, a + c, f + e, \alpha - \beta$ (619, 529)

672. $F, a - c, f - e, \alpha - \beta$ (620, 530)

673. $F, b + d, f + e, \alpha + \beta$ (621, 529)

674. $F, b - d, f - e, \alpha + \beta$ (622, 530)

675. $F, a + c, f + e, \beta'$ (649, 529)

676. $F, a - c, f - e, \beta'$ (650, 530)

677. $F, e, f, a + c$ (539, 609)

678. $F, e, f, a - c$ (539, 610)

679. $F, a + c, e, \varepsilon$ (522, 609)

680. $F, a - c, e, \varepsilon$ (522, 610)

681. $F, a - c, f + e, \varepsilon$ (527, 610)

682. $F, a + c, f - e, \varepsilon$ (528, 609)

683. $F, f^2 + e^2, a + c, \varepsilon$ (533, 609)

684. $F, f^2 + e^2, a - c, \varepsilon$ (533, 610)

685. $F, f^2 - e^2, a + c, \varepsilon$ (534, 609)

686. $F, f^2 - e^2, a - c, \varepsilon$ (534, 610).

k) $F, a^2 - b^2, c^2 - d^2, \alpha, \varepsilon$ sind von einander abhängig, so daß aus je dreien dieser Stücke sich die beiden übrigen stets berechnen lassen.

Es ist nämlich $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = -\frac{\sin(\varepsilon-\alpha)}{\sin(\varepsilon+\alpha)}$, oder $\frac{(a^2-b^2)-(c^2-d^2)}{-(a^2-b^2)-(c^2-d^2)}$ $= \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha}$, und $\frac{a^2-b^2}{2F} = \frac{\sin(\varepsilon-\alpha)}{\sin\alpha\,\sin\varepsilon} = \cot\alpha - \cot\varepsilon$. Anstatt α und ε kann auch $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$, oder $\gamma' - \delta' = \varepsilon + \alpha - \pi$ gegeben sein.

687. $a^2-b^2=g^2, c^2-d^2=g'^2, \alpha, \beta$. Aufl. $\frac{\sin(\varepsilon-\alpha)}{\sin(\varepsilon+\alpha)} = -\frac{g^2}{g'^2}$ (§. 7, 8), dann wie 77.

688. $a^2-b^2, c^2-d^2, \beta', \gamma'$ (687)

689. a, b, c^2-d^2, α (687, 41)

690. $a^2-b^2, c^2-d^2, r, \alpha$ (687, 94)

691. $a^2-b^2, c^2-d^2, f, \alpha$ (690)

692. a^2-b^2, c^2-d^2, r, f (690)

693. $a^2-b^2, c^2-d^2, e, \alpha$ (687, 97).

694. $a^2-b^2=g^2, c^2-d^2=g'^2, \varepsilon, \beta$. Aufl. $\frac{\sin(\varepsilon-\alpha)}{\sin(\varepsilon+\alpha)} = -\frac{g^2}{g'^2}$ (§. 7, 7), dann wie 77.

695. $a^2-b^2, c^2-d^2, \alpha', \gamma'$ (694)

696. $a, b, c^2-d^2, \varepsilon$ (694, 41)

697. $a^2-b^2, c^2-d^2, r, \varepsilon$ (694, 94)

698. $a^2-b^2, c^2-d^2, f, \varepsilon$ (694, 94)

699. $a^2-b^2, c^2-d^2, e, \varepsilon$ (694, 97).

700. $a^2-b^2=g^2, c^2-d^2=g'^2, f+e=s, \alpha$. Aufl. wie 687. Ferner ist $g = 2r\sqrt{\sin(\varepsilon-\alpha)}\,.\,\sqrt{\sin\beta}$. Damit $\sqrt{\sin(\varepsilon-\alpha)}$ nicht imaginär werde, muß $\varepsilon - \alpha = \alpha' - \beta' > 0$ sein, woraus $\alpha' > \beta'$ oder $a > b$ folgt. Eliminirt man r aus diesem Ausdrucke und dem für s, so erhält man $\sin\beta - \frac{s}{g}\sqrt{\sin(\varepsilon-\alpha)}\,.\,\sqrt{\sin\beta} + \sin\alpha = 0$ (§. 10).

701. $a^2-b^2, c^2-d^2, f-e, \alpha$ (700).

702. $a^2-b^2, c^2-d^2, f+e, \varepsilon$ (694, 700).

703. $a^2-b^2, c^2-d^2, f-e, \varepsilon$ (694, 701).

704. $a^2-b^2=g^2, c^2-d^2=g'^2, f^2-e^2=g''^2, \alpha$ (688), dann $\sin\beta^2 + \frac{g''^2}{g^2}\sin(\varepsilon-\alpha)\sin\beta - \sin\alpha^2 = 0$, dann wie 77.

705. $a^2-b^2, c^2-d^2, f^2-e^2, \varepsilon$ (694, 704).

706. $a^2-b^2=g^2, c, \alpha, \varepsilon$. Aufl. $c^2-d^2 = -\frac{g^2\sin(\varepsilon+\alpha)}{\sin(\varepsilon-\alpha)}$, dann wie 41.

707. $a^2-b^2, f+e, \alpha, \varepsilon$ (700).

708. $a^2-b^2, f-e, \alpha, \varepsilon$ (700).

709. $a^2-b^2, f^2-e^2, \alpha, \varepsilon$ (704).

710. $a^2-b^2=g^2, c^2-d^2=g'^2, \gamma', \alpha'-\beta'=\tau$. Aufl. $\sin(\gamma'-\delta') = \frac{g'^2\sin\tau}{g^2}$.

711. $a^2-b^2, c, d, \alpha'-\beta'$ (710, 41).

712. $a^2 - b^2,\ c^2 - d^2,\ f,\ \alpha' - \beta'$ (710, 94).
713. $a^2 - b^2,\ c^2 - d^2,\ f + e,\ \alpha' - \beta'$ (710, 700).
714. $a^2 - b^2,\ c^2 - d^2,\ f - e,\ \alpha' - \beta'$ (710, 701.)
715. $a^2 - b^2,\ c^2 - d^2,\ f^2 - e^2,\ \alpha' - \beta'$ (710, 704).
716. $F,\ a^2 - b^2 = g^2,\ \beta,\ \varepsilon$. Aufl. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\varepsilon - \alpha)} = \dfrac{2\,F}{g^2 \sin\varepsilon}$ (§. 7, 7), dann wie 77.
717. $F,\ a^2 - b^2,\ \alpha',\ \gamma'$ (716)
718. $F,\ a,\ b,\ \varepsilon$ (716, 41)
719. $F,\ a^2 - b^2,\ c,\ \varepsilon$ (716, 706)
720. $F,\ a^2 - b^2,\ r,\ \varepsilon$ (716, 94)
721. $F,\ a^2 - b^2,\ f,\ \varepsilon$ (716, 94)
722. $F,\ a^2 - b^2,\ e,\ \varepsilon$ (716, 98).
723. $F,\ a^2 - b^2 = g^2,\ c + d,\ \varepsilon$ (716), $c^2 - d^2 = -\dfrac{2\,F \sin(\varepsilon + \alpha)}{\sin\alpha \sin\varepsilon}$, dann wie 41.
724. $F,\ a^2 - b^2,\ c - d,\ \varepsilon$ (723)
725. $F,\ a^2 - b^2,\ f + e,\ \varepsilon$ (716, 700)
726. $F,\ a^2 - b^2,\ f - e,\ \varepsilon$ (725)
727. $F,\ a^2 - b^2,\ f^2 - e^2,\ \varepsilon$ (716, 704)
728. $F,\ a^2 - b^2 = g^2,\ \alpha,\ \beta$. Aufl. $\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin(\varepsilon - \alpha)} = \dfrac{2\,F}{g^2 \sin\alpha}$ (§. 7, 8), dann wie 77.
729. $F,\ a^2 - b^2 = g^2,\ \beta',\ \gamma'$ (728)
730. $F,\ a,\ b,\ \alpha$ (728, 41)
731. $F,\ a^2 - b^2,\ c,\ \alpha$ (728, 706)
732. $F,\ a^2 - b^2,\ r,\ \alpha$ (728, 94)
733. $F,\ a^2 - b^2,\ f,\ \alpha$ (732)
734. $F,\ a^2 - b^2,\ f,\ r$ (732)
735. $F,\ a^2 - b^2,\ e,\ \alpha$ (728, 98)
736. $F,\ a^2 - b^2,\ c + d,\ \alpha$ (728, 723)
737. $F,\ a^2 - b^2,\ c - d,\ \alpha$ (736)
738. $F,\ a^2 - b^2,\ f + e,\ \alpha$ (728, 700)
739. $F,\ a^2 - b^2,\ f - e,\ \alpha$ (728, 701)
740. $F,\ a^2 - b^2,\ f^2 - e^2,\ \alpha$ (728, 704).
741. $F,\ a^2 - b^2 = g^2,\ \gamma',\ \alpha' - \beta' = \tau$. Aufl. $\cos(\gamma' - \delta') = \dfrac{4\,F}{g^2} \sin\tau - \cos\tau$ (§. 3, 2), dann wie 77.
742. $F,\ a^2 - b^2,\ c,\ \alpha' - \beta'$ (741, 706). 743. $F,\ a^2 - b^2,\ f,\ \alpha' - \beta'$ (741, 522).
744. $F,\ a^2 - b^2,\ c + d,\ \alpha' - \beta'$ (741, 724).
745. $F,\ a^2 - b^2,\ c - d,\ \alpha' - \beta'$ (744).
746. $F,\ a^2 - b^2,\ f + e,\ \alpha' - \beta'$ (741, 700).
747. $F,\ a^2 - b^2,\ f - e,\ \alpha' - \beta'$ (741, 701).
748. $F,\ a^2 - b^2,\ f^2 - e^2,\ \alpha' - \beta'$ (741, 704).
749. $F,\ a^2 - b^2 = g^2,\ \alpha',\ \gamma' - \delta' = \tau$. Aufl. $4\,F \sin(\alpha' - \beta') - g^2 \cos(\alpha' - \beta') = g^2 \cos\tau$ (§. 3, 1), dann wie 77.
750. $F,\ a,\ b,\ \gamma' - \delta'$ (749, 41)
751. $F,\ a^2 - b^2,\ c,\ \gamma' - \delta'$ (749, 706)
752. $F,\ a^2 - b^2,\ r,\ \gamma' - \delta'$ (749, 94)
753. $F,\ a^2 - b^2,\ e,\ \gamma' - \delta'$ (749, 98)
754. $F,\ a^2 - b^2,\ f,\ \gamma' - \delta'$ (749, 94).
755. $F,\ a^2 - b^2,\ c + d,\ \gamma' - \delta'$ (749, 723).
756. $F,\ a^2 - b^2,\ c - d,\ \gamma' - \delta'$ (755).
757. $F,\ a^2 - b^2,\ f + e,\ \gamma' - \delta'$ (749, 700).

758. F, $a^2 - b^2$, $f - e$, $\gamma' - \delta'$ (749, 701).
759. F, $a^2 - b^2$, $f^2 - e^2$, $\gamma' - \delta'$ (749, 704).
760. F, $a^2 - b^2 = g^2$, $c^2 - d^2 = g'^2$, β. Aufl. $\cot\alpha = \frac{g^2 - g'^2}{4F}$,

$\cot\varepsilon = -\frac{g^2 + g'^2}{4F}$, oder $\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\varepsilon - \alpha)} = \frac{2F}{g^2 \sin\alpha}$ (§. 7, 8), dann wie 77.

761. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, α' (760)
762. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, β' (760)
763. F, a, b, $c^2 - d^2$ (760, 41)
764. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, r (760, 94)
765. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, e (760, 98)
766. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, f (760, 94).
767. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, $f + e$ (760, 700).
768. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, $f - e$ (760, 701).
769. F, $a^2 - b^2$, $c^2 - d^2$, $f^2 - e^2$ (760, 704).
770. F, $a + b$, α, ε. Aufl. $a^2 - b^2 = \frac{2F \sin(\varepsilon - \alpha)}{\sin\varepsilon \sin\alpha}$.
771. F, $a - b$, α, ε (770).
772. F, a, α, ε (770, 41).
773. F, ab, α, ε (770).

1) $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, α, β, F sind von einander abhängig, so daß aus dreien dieser Stücke die beiden anderen sich stets berechnen lassen, denn $\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$, mithin $\frac{(a^2 - c^2) + (b^2 - d^2)}{(a^2 - c^2) - (b^2 - d^2)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.

774. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, α, ε. Aufl. $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{g^2}{g'^2}$, (§. 7, 7), dann wie 305.

775. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, β', γ' (774)
776. a, c, $b^2 - d^2$, α (774, 247)
777. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, r, α (774, 322)
778. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f, α (777)
779. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f, r (777)
780. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, e, α (774, 322)
781. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f + e$, α (774, 470).
782. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f - e$, α (774, 471).
783. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, α (774, 487).
784. $a^2 - c^2 = g^2$, b, α, β. Aufl. $b^2 - d^2 = \frac{g^2 \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$, dann wie 247.
785. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, β', $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g'^2 \sin\sigma}{g^2}$, dann wie 305.
786. $a^2 - c^2$, b, d, $\alpha + \beta$ (785, 247).
787. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f, $\alpha + \beta$ (785, 322).
788. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f + e$, $\alpha + \beta$ (785, 470).
789. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f - e$, $\alpha + \beta$ (785, 471).
790. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha + \beta$ (785, 487).

791. $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, α' $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{g^2 \sin\tau}{g'^2}$, dann wie 305.

792. $b^2 - d^2$, a, c, $\alpha - \beta$ (791, 247).

793. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f, $\alpha - \beta$ (791, 322).

794. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f + e, $\alpha - \beta$ (791, 470).

795. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f − e, $\alpha - \beta$ (791, 471).

796. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha - \beta$ (791, 487).

797. F, $a^2 - c^2 = g^2$, α, ε. Aufl. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{g^2 \sin\alpha}{2\,F}$ (§. 7, 8), dann wie 305.

798. F, $a^2 - c^2$, β', γ' (797)

799. F, a, c, α (797, 247)

800. F, $a^2 - c^2$, b, α (797, 784)

801. F, $a^2 - c^2$, r, α (797, 322)

802. F, $a^2 - c^2$, f, α (801)

803. F, $a^2 - c^2$, r, f (801)

804. F, $a^2 - c^2$, e, α (797, 322)

805. F, $a^2 - c^2$, f + e, α (797, 470)

806. F, $a^2 - c^2$, f − e, α (797, 471).

807. F, $a^2 - c^2$, b + d, α. Aufl. wie 797, dann $b^2 - d^2 = \frac{2\,F \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$ und 247.

808. F, $a^2 - c^2$, b − d, α (807).

809. F, $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, α (797, 487).

810. F, $a^2 - c^2 = g^2$, β', $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + \beta) + \frac{4\,F}{g^2} \sin(\alpha + \beta)$ (§. 3, 2), dann wie 305.

811. F, a, c, $\alpha + \beta$ (810, 247).

812. F, $a^2 - c^2$, b, $\alpha + \beta$ (810, 784).

813. F, $a^2 - c^2$, e, $\alpha + \beta$ (810, 322).

814. F, $a^2 - c^2$, b + d, $\alpha + \beta$ (810, 807).

815. F, $a^2 - c^2$, b − d, $\alpha + \beta$ (814).

816. F, $a^2 - c^2$, f + e, $\alpha + \beta$ (810, 470).

817. F, $a^2 - c^2$, f − e, $\alpha + \beta$ (810, 471).

818. F, $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha + \beta$ (810, 487).

819. F, $a^2 - c^2 = g^2$, α', $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $g^2 \cos(\alpha + \beta) + 4\,F \sin(\alpha + \beta) = g^2 \cos\tau$ (§. 3, 1), dann wie 305.

820. F, a, c, $\alpha - \beta$ (819, 247)

821. F, $a^2 - c^2$, b, $\alpha - \beta$ (819, 784)

822. F, $a^2 - c^2$, r, $\alpha - \beta$ (819, 322)

823. F, $a^2 - c^2$, f, $\alpha - \beta$ (819, 322)

824. F, $a^2 - c^2$, e, $\alpha - \beta$ (823).

825. F, $a^2 - c^2$, b + d, $\alpha - \beta$ (819, 807).

826. F, $a^2 - c^2$, b − d, $\alpha - \beta$ (825).

827. F, $a^2 - c^2$, f + e, $\alpha - \beta$ (819, 470).

828. F, $a^2 - c^2$, f − e, $\alpha - \beta$ (819, 471).

829. F, $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha - \beta$ (819, 487).

830. F, $a^2 - c^2 = g^2$, $b^2 - d^2 = g'^2$, ε. Aufl. $\cot\beta = \frac{g^2 - g'^2}{4F}$, $\cot\alpha = \frac{g^2 + g'^2}{4F}$ oder $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = \frac{g^2 \sin\beta}{2F}$ (§. 7, 8), dann 305.

831. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, α' (830)

832. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, γ' (830)

833. F, a, c, $b^2 - d^2$ (830, 247)

834. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, r (830, 322)

835. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, f (830, 322)

836. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f + e$ (830, 470).

837. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f - e$ (830, 471).

838. F, $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$ (830, 487).

839. F, a, α, β. Aufl. $a^2 - c^2 = \frac{2F\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, dann 247.

840. F, $a + c$, α, β (839).

841. F, $a - c$, α, β (839).

m) $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, β', δ' sind von einander abhängig, so daß sich aus je drei von diesen Stücken stets das vierte berechnen läßt, denn $\frac{a^2 - c^2}{f^2 - e^2} = \frac{\sin(\beta' + \delta')}{\sin(\beta' - \delta')}$, und $\frac{(a^2 - c^2) + (f^2 - e^2)}{(a^2 - c^2) - (f^2 - e^2)} = \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\delta'}$. Anstatt β' und δ' können auch $\alpha - \beta = \beta' - \delta'$ und $\varepsilon = \pi - (\beta' + \delta')$ gegeben sein. Etwas Aehnliches gilt für $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha + \beta$, ε, denn $\frac{b^2 - d^2}{f^2 - e^2} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha' + \gamma')}{\sin(\alpha' - \gamma')}$. Anstatt α' und γ' können auch $\alpha' + \gamma' = \varepsilon$ und $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ gegeben sein.

842. $a^2 - c^2 = g^2$, $f^2 - e^2 = g'^2$, α, ε. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g'^2 \sin\varepsilon}{g^2}$, dann wie 305 oder 480.

843. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b, ε (842, 309).

844. $a^2 - c^2$, e, f, ε (842, 415).

845. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $b + d$, ε (842, 291, 293).

846. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $b - d$, ε (845).

847. $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, ε (842, 314).

848. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, F, ε (842, 819).

849. $a^2 - c^2 = g^2$, $f^2 - e^2 = g'^2$, α', $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{g^2 \sin\tau}{g'^2}$, dann wie 305.

850. a, c, $f^2 - e^2$, $\alpha - \beta$ (849, 227).

851. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b, $\alpha - \beta$ (849, 309).

852. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $b + d$, $\alpha - \beta$ (849, 293).

853. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $b - d$, $\alpha - \beta$ (852).

854. F, $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha - \beta$ (849, 819).

855. $b^2 - d^2 = g^2$, $f^2 - e^2 = g'^2$, β', $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{g^2 \sin\sigma}{g'^2}$, dann wie 305.

856. b, d, $f^2 - e^2$, $\alpha + \beta$ (855, 227).
857. $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, a, $\alpha + \beta$ (855, 309).
858. $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, a + c, $\alpha + \beta$ (855, 293).
859. $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, a — c, $\alpha + \beta$ (858).
860. F, $b^2 - d^2$, $f^2 - e^2$, $\alpha + \beta$ (854).
861. $a^2 - c^2 = g^2$, f, β', δ'. Aufl. $f^2 - e^2 = \frac{g^2 \sin(\beta' - \delta')}{\sin(\beta' + \delta')}$, dann wie 415.
862. F, $a^2 - c^2$, β', δ' (819, 305).
863. $f^2 - e^2 = g^2$, a, β', δ'. Aufl. $a^2 - c^2 = \frac{g^2 \sin(\beta' + \delta')}{\sin(\beta' - \delta')}$.
864. $a^2 - c^2 = g^2$, $f^2 - e^2 = g'^2$, α', β'. Aufl. $\frac{\sin(\beta' + \delta')}{\sin(\beta' - \delta')} = \frac{g^2}{g'^2}$ (§. 7, 7), dann (305, 480).
865. $f^2 - e^2$, a, c, β' (864, 227).
866. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, r, β' (864, 309, 488).
867. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b, β' (866). 868. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b, r (866).
869. $a^2 - c^2$, e, f, β' (864, 415).
870. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b + d, β' (864, 293).
871. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, b — d, β' (870).
872. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, $b^2 - d^2$, β' (864), dann $\sin(\alpha + \beta) = \frac{(f^2 - e^2)\sin\varepsilon}{b^2 - d^2}$, dann wie 305.
873. $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, F, β' (864, 819)
874. F, $a^2 - c^2$, e, f (844)
875. F, $a^2 - c^2$, f + e, ε (527, 874)
876. F, $a^2 - c^2$, f — e, ε (528, 874)
877. F, $a^2 - c^2$, $f^2 - e^2$, ε (527, 874).

n) Unter den gegebenen Stücken befindet sich der Umfang des Sehnenvierecks.

878. a + b + c + d = u, r, α, β. Aufl. $\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon + \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{u}{4r}$ (§. 3, 1).
879. a + b + c + d, r, f, β (878).
880. a + b + c + d, r, e, f (878).
881. a + b + c + d, e, f, α (878).
882. a + b + c + d, e, α, β (878).
883. a + b + c + d = u, f + e = s, α, β. Aufl. $\frac{\sin \tfrac{1}{2}\varepsilon}{\cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)} + \frac{\cos \tfrac{1}{2}\varepsilon}{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{u}{s}$ (§. 3, 1).
884. a + b + c + d, f — e, α, β (883).
885. a + b + c + d, $f^2 - e^2$, α, β (480, 878).
886. a + b + c + d = u, α, β, ε. Aufl.

$$r = \frac{u}{4\left(\sin \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)}.$$

887. $a + b + c + d = u, r, \alpha, \varepsilon$. Aufl. $\sin {}^1/_2 (\varepsilon + \alpha) \sin {}^1/_2 \beta + \cos {}^1/_2 (\varepsilon - \alpha) \cos {}^1/_2 \beta = \frac{u}{4r}$ (§. 3, 1).

888. $a + b + c + d, r, f, \varepsilon$ (887). 889. $a + b + c + d, f, \alpha, \varepsilon$ (887).

890. $a + b + c + d = u, F, \alpha, \beta$. Aufl. Nach der Elimination von r aus den Gleichungen für u und $\sqrt{F}$ erhält man $\operatorname{tg} {}^1/_2 \varepsilon - \frac{u \sqrt{\sin \alpha \sin \beta}}{2 \sqrt{F} \sin {}^1/_2 (\alpha + \beta)} \sqrt{\operatorname{tg} {}^1/_2 \varepsilon} + \frac{\cos {}^1/_2 (\alpha - \beta)}{\cos {}^1/_2 (\alpha + \beta)} = 0$ (§. 10).

891. $a + b + c + d = u, F, \alpha, \varepsilon$ (890).

o) Aufgaben, welche keiner der vorhergehenden Abtheilungen untergeordnet werden können.

892. $F, \alpha, \beta, \varepsilon$. Aufl. $r = \sqrt{\frac{F}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \varepsilon}}$.

893. a, b, c, d. 1. Aufl. Indem man r aus den Ausdrücken für $a + b$ und $c - d$, dann aus denen für $a - b$ und $c + d$ eliminirt, erhält man $\frac{\cos {}^1/_2 (\varepsilon - \alpha)}{\cos {}^1/_2 (\varepsilon + \alpha)} = -\frac{a + b}{c - d}$ und $\frac{\sin {}^1/_2 (\varepsilon - \alpha)}{\sin {}^1/_2 (\varepsilon + \alpha)} = \frac{a - b}{c + d}$ (§. 9, 3). Man findet, indem man $a + b + c + d = 2s$ setzt, $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$, $\operatorname{tg} {}^1/_2 \beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}$, $\operatorname{tg} {}^1/_2 \varepsilon = \sqrt{\frac{(s-b)(s-d)}{(s-a)(s-c)}}$. 2. Aufl. Es ist $f^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad \cos \alpha$ und $f^2 = b^2 + c^2 + 2\,bc \cos \alpha$. Setzt man beide Ausdrücke für f^2 einander gleich und entwickelt $\cos \alpha$ aus der Gleichung, so erhält man $\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)}{2\,ad + 2\,bc}$. Hieraus folgt $1 + \cos \alpha = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2\,ad + 2\,bc}$ und demnach $\cos {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{4\,(ad + bc)}} = \sqrt{\frac{(a+b-c+d)(a-b+c+d)}{4\,(ad+bc)}}$, oder, wenn man $a + b + c + d = 2s$ setzt, $\cos {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{ad + bc}}$ (I). Ferner ist $1 - \cos \alpha = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2\,ad + 2\,bc}$, mithin $\sin {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{4\,(ad + bc)}} = \sqrt{\frac{(a+b+c-d)(-a+b+c+d)}{4\,(ad + bc)}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad + bc}}$ (II). Aus (I) und (II) folgt $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$. Ferner ist

$F = \frac{1}{2} ad \sin\alpha + \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2}(ad + bc)\sin\alpha = (ad + bc)\sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

894. a, c, e, f. Aufl. ähnlich wie 893; $\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\cos\frac{1}{2}(\beta' + \delta')} = \frac{f + e}{a + c}$, $\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta' - \delta')}{\sin\frac{1}{2}(\beta' + \delta')} = \frac{f - e}{a - c}$.

895. $a + c = s, b + d = s', f + e = s'', r$. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{s s'}{2 s'' r}$, dann wie 276.

896. $a - c = g, b - d = g', f - e = g'', r$. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{g g'}{2 g'' r}$, dann wie 278.

897. $a + c = s, b - d = g, f + e = s', r$. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g s'}{2 s r}$, dann wie 460.

898. $a - c = g, b + d = s, f - e = g', r$. Aufl. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g' s}{2 g r}$, dann wie 462.

899. $a^2 - c^2 = g^2, b^2 - d^2 = g'^2, f^2 - e^2 = g''^2, r$. Aufl. $\sin\varepsilon = \frac{g g'}{2 r g''}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{g g''}{2 r g'}$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{g' g''}{2 r g}$.

900. $b + c + d = s, a, \alpha, \varepsilon$. Aufl. Es ist $s - a = (b + d) - (a - c) = 8 r \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\varepsilon$. Man findet nach Elimination von r schließlich $\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\alpha'} = \frac{s - a}{4 a \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\varepsilon}$, $\frac{1}{2}\beta + \alpha' = \frac{1}{2}(\pi + \varepsilon - \alpha)$ (§. 7, 3).

901. $b + c + d = s, a, \alpha, \beta$. Aufl. ähnlich wie 899. $\frac{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\alpha'} = \frac{s - a}{4 a \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta}$, $\alpha' - \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta)$ (§. 7, 4).

§. 35.

Aufgaben über das Tangentenviereck.

Die Seiten, ebenso auch Aggregate der Seiten und der Inhalt lassen sich einfach durch ϱ und die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausdrücken. Man findet leicht $a = \varrho(\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta) = \frac{\varrho \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta}$, $b = \varrho(\cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma) = \frac{\varrho \sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)}{\sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}$, $c = \varrho(\cot\frac{1}{2}\gamma + \cot\frac{1}{2}\delta) = \frac{\varrho \sin\frac{1}{2}(\gamma + \delta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}\delta} = \frac{\varrho \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}\delta}$, $d = \varrho(\cot\frac{1}{2}\delta + \cot\frac{1}{2}\alpha)$

$= \frac{\varrho \sin {}^1\!/_2 (\delta + \alpha)}{\sin {}^1\!/_2 \delta \sin {}^1\!/_2 \alpha} = \frac{\varrho \sin {}^1\!/_2 (\beta + \gamma)}{\sin {}^1\!/_2 \delta \sin {}^1\!/_2 \alpha}$, $a + c = \varrho (\cot {}^1\!/_2 \alpha + \cot {}^1\!/_2 \beta + \cot {}^1\!/_2 \gamma + \cot {}^1\!/_2 \delta) = \frac{\varrho \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \gamma) \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \delta)}{\sin {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 \beta \sin {}^1\!/_2 \gamma \sin {}^1\!/_2 \delta}$, $= \frac{\varrho \sin {}^1\!/_2 (\beta + \delta) \sin {}^1\!/_2 (\delta + \gamma) \sin {}^1\!/_2 (\gamma + \beta)}{\sin {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 \beta \sin {}^1\!/_2 \gamma \sin {}^1\!/_2 \delta}$, $a - b = d - c = \varrho (\cot {}^1\!/_2 \alpha - \cot {}^1\!/_2 \gamma) = \frac{\varrho \sin {}^1\!/_2 (\gamma - \alpha)}{\sin {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 \gamma}$, $b - c = a - d = \varrho (\cot {}^1\!/_2 \beta - \cot {}^1\!/_2 \delta) = \frac{\varrho \sin {}^1\!/_2 (\delta - \beta)}{\sin {}^1\!/_2 \delta \sin {}^1\!/_2 \beta}$, $F = {}^1\!/_2 (a + b + c + d) \varrho = (a + c) \varrho = \frac{\varrho^2 \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \gamma) \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \delta)}{\sin {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 \beta \sin {}^1\!/_2 \gamma \sin {}^1\!/_2 \delta}$. Auch können noch die folgenden Formeln Anwendung finden: $a \sin {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 \beta = c \sin {}^1\!/_2 \gamma \sin {}^1\!/_2 \delta$, $b \sin {}^1\!/_2 \beta \sin {}^1\!/_2 \gamma = d \sin {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 \delta$, $ab \sin {}^1\!/_2 \beta^2 = cd \sin {}^1\!/_2 \delta^2$, $bc \sin {}^1\!/_2 \gamma^2 = ad \sin {}^1\!/_2 \alpha^2$, $ac \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \delta)^2 = bd \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)^2$.

a) Die vier gegebenen Stücke liefern mit Zuhülfenahme der Gleichung $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ die nöthige Zahl von Gleichungen, um $\varrho, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, soweit sie nicht schon gegeben sind, zu berechnen. Die übrigen Stücke findet man dann aus den vorstehenden Gleichungen.

1. $\varrho, \alpha, \beta, \gamma$.

2. a, α, β, γ. Aufl. $\varrho = \frac{a \sin {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 \beta}{\sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)}$, $b = \frac{a \sin {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 (\beta + \gamma)}{\sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) \sin {}^1\!/_2 \gamma}$.

3. $a + c = s, \alpha, \beta, \gamma$. Aufl. $a = \frac{s \sin {}^1\!/_2 \gamma \sin {}^1\!/_2 \delta}{\sin {}^1\!/_2 (\alpha + \gamma) \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \delta)}$.

4. $a - b = g, \alpha, \beta, \gamma$. Aufl. $\varrho = \frac{g \sin {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 \gamma}{\sin {}^1\!/_2 (\gamma - \alpha)}$,

$$a = \frac{g \sin {}^1\!/_2 \gamma \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)}{\sin {}^1\!/_2 \beta \sin {}^1\!/_2 (\gamma - \alpha)}.$$

5. F, α, β, γ. Aufl. $a = \sqrt{\frac{F \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) \sin {}^1\!/_2 \gamma \sin {}^1\!/_2 \delta}{\sin {}^1\!/_2 (\alpha + \gamma) \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \delta) \sin {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 \beta}}$.

6. $a, \varrho, \alpha, \gamma$. 1. Aufl. $\cot {}^1\!/_2 \beta = \frac{a}{\varrho} - \cot {}^1\!/_2 \alpha$. 2. Aufl. Man findet b aus $a - b = \frac{\varrho \sin {}^1\!/_2 (\gamma - \alpha)}{\sin {}^1\!/_2 \gamma \sin {}^1\!/_2 \alpha}$, daher auch $d - c$ bekannt. Ferner ergiebt sich $\frac{d}{c} = \frac{b \sin {}^1\!/_2 \gamma^2}{a \sin {}^1\!/_2 \alpha^2}$, daher d und c zu finden.

7. $a, \varrho, \beta, \gamma$. Aufl. $\cot {}^1\!/_2 \alpha = \frac{a}{\varrho} - \cot {}^1\!/_2 \beta$.

8. $a, \varrho, \gamma, \delta$. Aufl. $\sin {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 \beta = \frac{\varrho \sin {}^1\!/_2 (\gamma + \delta)}{a}$ und ${}^1\!/_2 \alpha + {}^1\!/_2 \beta = \pi - {}^1\!/_2 (\gamma + \delta)$ (§. 6, 1).

9. $a + c = s, \rho, \alpha, \beta$. Aufl. a zu finden, dann wie 8.
10. $a - c, \varrho, \alpha, \beta$. Aufl. wie 9. 11. $a + b, \varrho, \alpha, \beta$. Aufl. wie 9 und 7.
12. $a - b, \varrho, \alpha, \beta$. Aufl. wie 11.
13. $a - b = g, \varrho, \beta, \delta$. Aufl. $2\varrho \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) - g \cos \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) = g \cos \frac{1}{2}(\beta + \delta)$ (§. 3, 1).
14. $a + b, \varrho, \alpha, \gamma$. Aufl. $a - b$ zu finden.
15. $F, \varrho, \alpha, \beta$. Aufl. $a + c = \frac{F}{\varrho}$, dann wie 9.
16. $a, \varrho, \alpha - \beta = \tau, \delta$. Aufl. $a \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 2\varrho \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = a \cos \frac{1}{2}\tau$ (§. 3, 1).
17. $a, \varrho, \alpha + \beta = \sigma, \gamma + \alpha$. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta = \frac{\varrho \sin \frac{1}{2}\sigma}{a}$ (§. 6, 1).
18. $a, \varrho, \alpha + \beta, \gamma - \alpha$. Aufl. wie 17.
19. $a, \varrho, \alpha - \beta, \gamma + \alpha$. Aufl. wie 16.
20. $a, \varrho, \alpha - \beta, \gamma - \alpha$. Aufl. wie 16.
21. a, b, α, β. Aufl. $\cot \frac{1}{2}\gamma = \frac{b}{\varrho} - \cot \frac{1}{2}\beta$.
22. a, b, α, δ. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{a \sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta) \sin \frac{1}{2}\alpha}{b}$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\gamma = \pi - \frac{1}{2}\delta$ (§. 6, 1).
23. a, b, α, γ. 1. Aufl. $\varrho = \frac{(a - b) \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}$, $\cot \frac{1}{2}\beta = \frac{b}{\rho} - \cot \frac{1}{2}\gamma$. 2. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)} = \frac{a \sin \frac{1}{2}\alpha}{b \sin \frac{1}{2}\gamma}$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$ (§. 7, 2).
24. a, c, α, β. Aufl. $\sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\delta = \frac{a}{c} \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta = \pi - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta)$ (§. 6, 1).
25. a, c, β, γ. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{c \sin \frac{1}{2}\gamma}{a \sin \frac{1}{2}\beta}$, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\delta = \pi - (\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\beta)$ (§. 7, 1).
26. a, c, α, γ. Aufl. $\frac{\sin \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \frac{c \sin \frac{1}{2}\gamma}{a \sin \frac{1}{2}\alpha}$, $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\delta = \pi - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma)$ (§. 7, 1).
27. $a - b = g, b - c = g', \alpha, \gamma$. Aufl. $2g \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\alpha \,.\, \sin \frac{1}{2}(\delta - \beta) - g' \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \cos \frac{1}{2}(\delta - \beta) = g' \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \cos \frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$ (§. 3, 1).
28. $a, b, \beta, \gamma - \alpha = \tau$. Aufl. $\frac{a - b}{a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \sin \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}\gamma}$ daher $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{a \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \sin \frac{1}{2}\beta}{a - b}$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\tau$ (§. 6, 2).

29. a, c, $\alpha - \beta = \tau$, $\gamma - \delta = \tau'$. Aufl. $\cos {}^1/_2 (\alpha + \beta) = \frac{a \cos {}^1/_2 (\alpha - \beta) - c \cos {}^1/_2 (\gamma - \delta)}{a + c}$.

30. F, a + c, α, β. Aufl. $\rho = \frac{F}{a + c}$, dann wie 9.

31. F, a, α, β. Aufl. $a + c = \frac{F}{\varrho} = \frac{F \sin {}^1/_2 (\alpha + \beta)}{a \sin {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta}$, dann wie 9 oder 24.

32. a, b, ϱ, α. Aufl. $\cot {}^1/_2 \gamma = \cot {}^1/_2 \alpha - \frac{a - b}{\varrho}$, $\cot {}^1/_2 \beta = \frac{b}{\varrho} - \cot {}^1/_2 \gamma = \frac{a}{\varrho} - \cot {}^1/_2 \alpha$.

33. a, b, ϱ, β. Aufl. $\cot {}^1/_2 \alpha = \frac{a}{\varrho} - \cot {}^1/_2 \beta$, $\cot {}^1/_2 \gamma = \frac{b}{\varrho} - \cot {}^1/_2 \beta$.

34. a, b, ϱ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta = \frac{\varrho \sin {}^1/_2 \sigma}{a}$, ${}^1/_2 \alpha + {}^1/_2 \beta = {}^1/_2 \sigma$ (§. 6, 1).

35. a, b, ρ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. $a \cos {}^1/_2 (\alpha + \beta) + 2 \varrho \sin {}^1/_2 (\alpha + \beta) = a \cos {}^1/_2 \tau$ (§. 3, 1).

36. a, b, ϱ, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. $(a - b) \cos {}^1/_2 (\gamma - \alpha) - 2 \rho \sin {}^1/_2 (\gamma - \alpha) = (a - b) \cos {}^1/_2 \sigma$ (§. 3, 1).

37. a, b, ρ, $\gamma - \alpha = \tau$. Aufl. $\sin {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \gamma = \frac{\rho \sin {}^1/_2 \tau}{a - b}$ (§. 6, 2).

38. a, c, ρ, α. Aufl. $\cot {}^1/_2 \beta = \frac{a}{\varrho} - \cot {}^1/_2 \alpha$, dann wie 8.

39. a, c, ρ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. wie 34.

40. a, c, ρ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. wie 35.

41. $a - b = g$, $b - c = g'$, ϱ, $\gamma - \alpha = \tau$. Aufl. wie 37, dann $\cot {}^1/_2 \beta - \cot {}^1/_2 \delta = \frac{g'}{\varrho}$, ${}^1/_2 \beta + {}^1/_2 \delta = \pi - ({}^1/_2 \alpha + {}^1/_2 \gamma)$ (§. 4, 19).

42. $a - b = g$, $b - c = g'$, ϱ, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. wie 36, dann $\cot {}^1/_2 \beta - \cot {}^1/_2 \delta = \frac{g'}{\varrho}$ (§. 4, 19).

43. $a - b = g$, $b - c = g'$, ϱ, α. Aufl. $\cot {}^1/_2 \gamma = \cot {}^1/_2 \alpha - \frac{g}{\varrho}$, $\cot {}^1/_2 \beta - \cot {}^1/_2 \delta = \frac{g'}{\varrho}$, ${}^1/_2 \beta + {}^1/_2 \delta = \pi - ({}^1/_2 \gamma + {}^1/_2 \alpha)$ (§. 4, 19).

44. $a + c = s$, ϱ, α, γ. Aufl. $\cot {}^1/_2 \beta + \cot {}^1/_2 \delta = \frac{a + c}{\varrho} - (\cot {}^1/_2 \alpha + \cot {}^1/_2 \gamma)$, ${}^1/_2 \delta + {}^1/_2 \beta = \pi - {}^1/_2 (\alpha + \gamma)$ (§. 4, 17).

45. a — c, ϱ, α, γ. Aufl. ähnlich wie 44.

46. F, a, ϱ, α. Aufl. $a + c = \frac{F}{\varrho}$, dann wie 38.
47. F, a, ϱ, γ. Aufl. ähnlich wie 46.
48. F, a, ϱ, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. wie 46 und 39.
49. F, a, ϱ, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. wie 46 und 40.
50. F, ϱ, α, γ. Aufl. wie 46 und 44.
51. a, b, c, α. Aufl. $d = a + c - b$, $\sin{}^1/_2\gamma = \sqrt{\frac{ad}{bc}}\sin{}^1/_2\alpha$.
52. a, b, c, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\sin{}^1/_2(\beta+\gamma) = \sqrt{\frac{bd}{ac}}\sin{}^1/_2\sigma$, so daß $\beta + \gamma$ und $\gamma - \alpha = (\beta + \gamma) - \sigma$ bekannt ist. Ferner ist $\sqrt{abcd} = \frac{\varrho^2 \sin{}^1/_2\sigma \sin{}^1/_2(\beta+\gamma)}{\sin{}^1/_2\alpha\,\sin{}^1/_2\beta\,\sin{}^1/_2\gamma\,\sin{}^1/_2\delta}$, folglich $\frac{\sqrt{abcd}}{(a+c)(a-b)}$ $= \frac{\sin{}^1/_2\gamma\,\sin{}^1/_2\alpha}{\sin{}^1/_2(\gamma+\alpha)\,\sin{}^1/_2(\gamma-\alpha)}$, mithin $\frac{2\sqrt{abcd}}{(a+c)(a-b)} \cdot \sin{}^1/_2(\gamma-\alpha)\sin{}^1/_2(\gamma+\alpha) + \cos{}^1/_2(\gamma+\alpha) = \cos{}^1/_2(\gamma-\alpha)$ (§. 3, 1).
53. a, b, c, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. Aehnlich wie bei 52 findet man $\varrho = \frac{\sqrt{abcd}\,\sin{}^1/_2\sigma}{a+c}$, ferner $\cot{}^1/_2\alpha - \cot{}^1/_2\gamma = \frac{(a+c)(a-b)}{\sqrt{abcd}\,\sin{}^1/_2\sigma}$ (§. 4, 19), $F = \sqrt{abcd}\,\sin{}^1/_2\sigma$.
54. a, b, c, $\gamma - \alpha = \tau$. Aufl. ähnlich wie 53.
55. F, a, c, α. Aufl. $\varrho = \frac{F}{a+c}$, dann wie 38.
56. F, a, c, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. $\frac{F}{\sqrt{abcd}} = \sin{}^1/_2\sigma$, daher $\sqrt{bd}$ $= \frac{F}{\sqrt{ac}\,\sin{}^1/_2\sigma}$, $b + d = a + c$ (§. 10).
57. F, a, b, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aehnlich wie 56 ist $\sqrt{cd} = \frac{F}{\sqrt{ab}\,\sin{}^1/_2\sigma}$ und $d - c = a - b$ (§. 10).
58. F, a, c, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. $\varrho = \frac{F}{a+c}$, wie 39.
59. F, a, c, $\alpha - \beta = \tau$. Aufl. wie 58 und 40.
60. a, c, ϱ, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. $F = (a + c)\,\rho$, dann wie 56.
61. F, a, ϱ, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. $a + c = \frac{F}{\varrho}$, dann wie 56.
62. F, a + c, α, γ. Aufl. $\varrho = \frac{F}{a+c}$, dann wie 44.
63. a, b, c, ϱ. Aufl. ähnlich wie 53, da d bekannt.

64. F, a, b, c. Aufl. $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = \frac{F}{\sqrt{abcd}}$, dann wie 56.

65. F, a, b, ϱ. Aufl. $a + c = \frac{F}{\varrho}$, dann wie 64.

b) Jn den folgenden Aufgaben kann man aus dreien der gegebenen Stücke das Dreieck ABC berechnen. Man kennt dann von △ ADC die beiden Stücke e und d — c = a — b. Mit Zuhülfenahme des vierten der gegebenen Stücke läßt sich dann △ ADC berechnen. Jst das vierte gegebene Stück c, c + d, $d^2 - c^2$, so beachte man §. 26. Jn den übrigen hier angeführten Aufgaben geschieht die Berechnung nach §. 14, 53, 54, 71. Jst das vierte gegebene Stück einer der Winkel α oder γ, so muß man erst durch Subtraction δ'' oder γ'' berechnen. Aehnlich verhält es sich, wenn das vierte gegebene Stück ein Aggregat zweier Winkel ist.

66. a, b, e, α
67. a, b, e, γ''
68. a, b, e, δ
69. a, b, e, $\gamma - \alpha$
70. a, b, e, $\gamma + \alpha$
71. a, b, e, $\delta - \beta$
72. a, b, e, $\alpha + \beta$
73. a, b, e, $\alpha - \beta$
74. a, b, α, β (21)
75. a, b, β, γ''
76. a, b, β, δ
77. a, b, β, $\gamma - \alpha$
78. a, e, β', γ
79. a, e, β', γ''
80. a, e, β', δ'
81. a, e, β', δ
82. a, e, β', $\gamma - \alpha$
83. a, e, β', $\gamma + \alpha$
84. a, e, β', $\alpha + \beta$
85. a, e, β', $\alpha - \beta$
86. a, β', α'', γ''
87. a, α'', β', δ
88. a, α'', β', $\gamma - \alpha$
89. e, β', α'', γ''
90. e, δ, β' α''
91. e, $\gamma - \alpha$, β', α''
92. a, b, α'', γ''
93. a, b, α'', α
94. a, b, α'', δ'
95. a, b, α'', δ
96. a, b, $\gamma - \alpha$, α''
97. a, b, $\gamma + \alpha$, α''
98. a, b, $\delta - \beta$, α''
99. a, b, α'', $\alpha + \beta$
100. a, b, α'', $\alpha - \beta$
101. a, e, β, γ''
102. a, e, α, β
103. a, e, β, γ
104. a, e, β, δ'
105. a, e, β, δ
106. a, e, β, $\gamma - \alpha$
107. a, e, α'', γ''
108. a, e, α, α''
109. a, e, α'', δ'
110. a, e, α'', δ
111. a, e, α'', $\gamma - \alpha$
112. a, e, α'', $\gamma + \alpha$
113. a, e, α'', $\delta - \beta$
114. a, e, α'', $\alpha + \beta$
115. a, e, α'', $\alpha - \beta$.

116. a + b, e, β', γ'' (§. 14, 70)
117. a — b, e, β', γ'' (§. 14, 71)
118. a + b, e, γ, β' (§. 14 70)
119. a — b, e, γ, β' (§. 14, 71)
120. a + b, e, β', δ' (§. 14, 70)
121. a — b, e, β', δ' (§. 14, 71)
122. a + b, e, δ, β' (§. 14, 70)
123. a — b, e, δ, β' (§. 14, 71)
124. a + b, e, $\gamma - \alpha$, β' (§. 14, 70)
125. a — b, e, $\gamma - \alpha$, β' (§. 14, 71)
126. a + b, e, $\gamma + \alpha$, β' (§. 14, 70)
127. a — b, e, $\gamma + \alpha$, β' (§ 14, 71)
128. a + b, e, $\delta - \beta$, β' (§. 14, 70)
129. a — b, e, $\delta - \beta$, β' (§. 14, 71)
130. a + b, e, $\alpha + \beta$, β' (§. 14, 70)
131. a — b, e, $\alpha + \beta$, β' (§. 14, 71)
132. a + b, e, $\alpha - \beta$, β' (§. 14, 70)
133. a — b, e, $\alpha - \beta$, β' (§. 14, 71)

134. $a + b, c, e, \beta'$ (§. 14, 70)
135. $a - b, c, e, \beta'$ (§. 14, 71)
136. $a + b, d, e, \beta'$ (§. 14, 70)
137. $a - b, d, e, \beta'$ (§. 14, 71)
138. $a + b, c + d, e, \beta'$ (§. 14, 70)
139. $a - b, c + d, e, \beta'$ (§. 14, 71)
140. $a + b, d^2 - c^2, e, \beta'$ (§. 14, 70)
141. $a - b, d^2 - c^2, e, \beta'$ (§. 14, 71)
142. $a + b, c, e, \beta$ (§. 14, 51)
143. $a - b, c, e, \beta$ (§. 14, 53)
144. $a + b, c + d, e, \beta$ (§. 14, 51)
145. $a + b, d^2 - c^2, e, \beta$ (§. 14, 53)
146. $a + b, e, \beta, \gamma''$ (§. 14, 51)
147. $a - b, e, \beta, \gamma''$ (§. 14, 53)
148. $a + b, e, \alpha, \beta$ (§. 14, 51)
149. $a - b, e, \alpha, \beta$ (§. 14, 53)
150. $a + b, e, \beta, \delta$ (§. 14, 51)
151. $a - b, e, \beta, \delta$ (§. 14, 53)
152. $a + b, e, \beta, \gamma - \alpha$ (§. 14, 51)
153. $a - b, e, \beta, \gamma - \alpha$ (§. 14, 53)
154. $a + b, c, \alpha'', \beta'$ (§. 14, 1)
155. $a - b, c, \alpha'', \beta'$ (§. 14, 2)
156. $a + b, c + d, \alpha'', \beta'$ (§. 14, 1)
157. $a + b, c^2 - d^2, \alpha'', \beta'$ (§. 14, 2)
158. $a + b, \beta', \alpha'', \gamma''$ (§. 14, 1)
159. $a - b, \beta', \alpha'', \gamma''$ (§. 14, 2)
160. $a + b, \delta, \beta', \alpha''$ (§. 14, 1)
161. $a - b, \beta', \delta, \alpha''$ (§. 14, 2)
162. $a + b, \gamma - \alpha, \beta', \alpha''$ (§. 14, 1)
163. $a - b, \gamma - \alpha, \beta', \alpha''$ (§. 14, 2)
164. $a, b, c, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 78)
165. $a, b, \gamma'', \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 78)
166. $a, b, \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 78)
167. $a, b, \delta, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 78)
168. $a, b, \gamma - \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 78)
169. $a, b, \gamma + \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 78)
170. $a, b, \alpha + \beta, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 78)
171. $a, b, \alpha - \beta, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 78)
172. $a + b, c, e, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 52)
173. $a - b, c, e, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 54)
174. $a + b, c + d, e, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 52)
175. $a + b, c^2 - d^2, e, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 54)
176. $a + b, e, \gamma'', \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 52)
177. $a - b, e, \gamma'', \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 54)
178. $a + b, e, \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 52)
179. $a - b, e, \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 54)
180. $a + b, e, \delta, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 52)
181. $a - b, e, \delta, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 54)
182. $a + b, e, \gamma - \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 52)
183. $a - b, e, \gamma - \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 54)
184. $a + b, e, \gamma + \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 52)
185. $a - b, e, \gamma + \alpha, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 54)
186. $a + b, e, \alpha + \beta, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 52)
187. $a - b, e, \alpha + \beta, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 54)
188. $a + b, e, \alpha - \beta, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 52)
189. $a - b, e, \alpha - \beta, \alpha'' - \beta'$ (§. 14, 54)
190. $a^2 - b^2, c, e, \beta$ (§. 14, 62)
191. $a^2 - b^2, d^2 - c^2, e, \beta$ (§. 14, 62)
192. $a^2 - b^2, c + d, e, \beta$ (§. 14, 62)
193. $a^2 - b^2, e, \alpha, \beta$ (§. 14, 62)
194. $a^2 - b^2, e, \beta, \gamma''$ (§. 14, 62)
195. $a^2 - b^2, e, \beta, \delta$ (§. 14, 62)
196. $a^2 - b^2, e, \beta, \gamma - \alpha$ (§. 14, 62)
197. $a^2 - b^2, c, \alpha'', \beta'$ (§. 14, 12)
198. $a^2 - b^2, c^2 - d^2, \alpha'', \beta'$ (§. 14, 12)
199. $a^2 - b^2, \alpha'', \gamma'', \beta'$ (§. 14, 12)
200. $a^2 - b^2, \alpha'', \beta', \delta$ (§. 14, 12)
201. $a^2 - b^2, \alpha'', \beta', \gamma - \alpha$ (§. 14, 12)
202. $a^2 - b^2, \alpha'', \beta', \gamma + \alpha$ (§. 14, 12)

c) Kann man aus dreien der gegebenen Stücke △ ABC berechnen, und ist das vierte gegebene Stück der Inhalt F des Tangentenvierecks, so berechne man zunächst den Inhalt von △ ABC, wodurch auch der Inhalt von △ ADC bekannt wird. Man kann daher △ ADC aus e, $d - c = a - b$ und dem Inhalt berechnen (§. 14, 453). Außer F ist gegeben:

203. a, b, e
204. a, b, β
205. a, e, β′
206. a, β′, α″
207. e, β′, α″
208. a, b, α″
209. a, e, β
210. a, e, α″
211. a + b, e, β′ (§. 14, 70)
212. a — b, e, β′ (§. 14, 71)
213. a + b, e, β (§. 14, 51)
214. a — b, e, β (§. 14, 53)
215. a + b, α″, β′ (§. 14, 1)
216. a — b, α″, β′ (§. 14, 2)
217. a, b, α″ — β′ (§. 14, 78)
218. a + b, e, α″ — β′ (§. 14, 52)
219. a — b, e, α″ — β′ (§. 14, 54)
220. $a^2 - b^2$, e, β (§. 14, 62)
221. $a^2 - b^2$, α″, β′ (§. 14, 12).

d) Kann man aus dreien der gegebenen Stücke △ ABC berechnen und ist das vierte ϱ, so ist die Aufgabe auf 33 zurückgeführt. Außer ϱ ist gegeben:

222. a, b, e
223. a, b, β
224. a, e, β′
225. a, β′, α″
226. e, β′, α″
227. a, b, α″
228. a, e, β
229. a, e, α″
230. a + b, e, β′ (§. 14, 70)
231. a — b, e, β′ (§. 14, 71)
232. a + b, e, β (§. 14, 51)
233. a — b, e, β (§. 14, 53)
234. a + b, e, α″ — β′ (§. 14, 52)
235. a — b, e, α″ — β′ (§. 14, 54)
236. a, b, α″ — β′ (§. 14, 78)
237. a + b, α″, β′ (§. 14, 1)
238. a — b, α″, β′ (§. 14, 2)
239. $a^2 - b^2$, e, β (§. 14, 62)
240. $a^2 - b^2$, α″, β′ (§. 14, 12).

e) Die Gestalt des Tangentenvierecks ist durch drei Winkel bestimmt, so daß, wenn drei beliebige Winkel desselben gegeben sind, die anderen aus ihnen berechnet werden können. Doch nur in wenigen Fällen ist diese Berechnung einfach. Es dienen zu derselben zwei Gleichungen zwischen den 8 Winkeln α', α'', β', β'', γ', γ'', δ', δ''. Aus $a = \frac{e \sin \alpha''}{\sin \beta}$ und $b = \frac{e \sin \beta'}{\sin \beta}$ folgt $a - b = \frac{e \sin \frac{1}{2}(\alpha'' - \beta')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha'' + \beta')}$, und ebenso erhält man $d - c = \frac{e \sin \frac{1}{2}(\delta' - \gamma'')}{\sin \frac{1}{2}(\delta' + \gamma'')}$. Da nun $a - b = d - c$ ist, so folgt hieraus $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha'' - \beta')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha'' + \beta')} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta' - \gamma'')}{\sin \frac{1}{2}(\delta' + \gamma'')}$ (I). Indem man dasselbe Verfahren auf die Dreiecke DBC und DBA anwendet, erhält man $\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta'' - \gamma')}{\sin \frac{1}{2}(\beta'' + \gamma')} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \delta'')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' + \delta'')}$ (II). Indem man in beiden Gleichungen auf jeder Seite 1 addirt und subtrahirt und das

so Erhaltene dividirt, erhält man noch $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha''}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta'} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta'}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma''}$ (III) und $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta''}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma'} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha'}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta''}$ (IV).

1. Gegeben sei α'', β', γ''. Man findet δ' aus (III). Ferner folgt aus (IV) $\frac{\sin \frac{1}{2} (\beta'' - \gamma')}{\sin \frac{1}{2} (\alpha' - \delta'')} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha'' + \delta')}{\cos \frac{1}{2} (\beta' + \gamma'')}$, und da $\frac{1}{2} (\beta'' - \gamma') + \frac{1}{2} (\alpha' - \delta'') = \frac{1}{2} (\alpha'' + \beta' - \gamma'' - \delta')$ ist, kann man nach §. 7, 1 $\frac{1}{2} (\alpha' - \delta'')$ und $\frac{1}{2} (\beta'' - \gamma')$ berechnen, somit auch α', δ'', β'', γ', da $\frac{1}{2} (\alpha' + \delta'')$ und $\frac{1}{2} (\beta'' + \gamma')$ bekannt ist. Die Aufgabe ist somit immer auf eine der früheren Abschnitte zurückgeführt. Außer α'', β', γ'' ist gegeben:

241. c (2, 86, 87)	246. $c^2 - d^2$ (199, 200)	251. a — d (4, 159, 161)
242. d (2, 86, 87)	247. a + c (3)	252. b + c (158, 160)
243. f (89, 90)	248. F (5)	253. $a^2 - d^2$ (199, 200)
244. c + d (158, 160)	249. ϱ (1)	254. $b^2 - c^2$ (199, 200)
245. c — d (4, 159, 161)	250. a + d (158, 160)	

2. Gegeben sei α'', β', δ. Aus (I) findet man $\sin \frac{1}{2} (\delta' - \gamma'') = \frac{\cos \frac{1}{2} \delta \, \sin \frac{1}{2} (\alpha'' - \beta')}{\sin \frac{1}{2} (\alpha'' + \beta')}$, wodurch δ' und γ'' gefunden werden. Die Berechnung der übrigen Winkel geschieht wie in 1). Außer α'', β', δ ist gegeben:

255. c (2, 86, 87)	260. a + c (3)	264. b + c (158, 160)
256. f (89, 90)	261. ϱ (1)	265. $a^2 - d^2$ (199, 200)
257. c + d (158, 160)	262. a + d (158, 160)	266. $b^2 - c^2$ (199, 200)
258. c — d (4, 159, 161)	263. a — d (4, 159, 161)	267. F (5).
259. $c^2 - d^2$ (199, 200)		

3. Gegeben sei α'', β', $\delta' - \gamma''$. Aus (1) erhält man $\sin \frac{1}{2} (\delta' + \gamma'') = \frac{\sin \frac{1}{2} (\delta' - \gamma'') \sin \frac{1}{2} (\alpha'' + \beta')}{\sin \frac{1}{2} (\alpha'' - \beta')}$, wodurch δ' und γ'' gefunden sind. Alles Uebrige wie in 1). Außer α'', β', $\delta' - \gamma''$ ist gegeben:

268. c (2, 86, 87)	273. a + c (3)	277. $a^2 - d^2$ (199, 200)
269. f (89, 90)	274. a + d (158, 160)	278. $b^2 - c^2$ (199, 200)
270. c + d (158, 160)	275. a — d (4, 159, 161)	279. ϱ (1)
271. c — d (4, 159, 161)	276. b + c (158, 160)	280. F (5).
272. $c^2 - d^2$ (199, 200)		

4. Gegeben sei α, δ', α''. Aus (III) folgt $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma''}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta'} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta'}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha''}$, und da $\frac{1}{2} \gamma'' + \frac{1}{2} \beta' = \frac{1}{2} \alpha$, so findet man γ'' und β' nach §. 6, 9. Alles Uebrige wie in 1). Außer α, δ', α'' ist gegeben:

281. a (2, 86, 87)	282. b (2, 86, 87)	283. c (89, 90)

284. f (89, 90)
285. a + b (158, 160)
286. a − b (4, 159, 161)
287. a + d (158, 160)
288. a − d (4, 159, 161)
289. b + c (158, 160)
290. a + c (3)
291. $a^2 - b^2$ (199, 200)
292. $a^2 - d^2$ (199, 200)
293. $b^2 - c^2$ (199, 200)
294. ϱ (1)
295. F (5).

5. Gegeben sei δ', α'', $\beta' - \gamma''$. Aus (III) folgt $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta'}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma''} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha''}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta'}$, daher β' und γ'' nach §. 6, 10 zu finden. Alles Uebrige wie in 1). Außer δ', α'', $\beta' - \gamma''$ ist gegeben:

296. a (2, 86, 87)
297. b (2, 86, 87)
298. e (89, 90)
299. f (89, 90)
300. a + b (158, 160)
301. a − b (4, 159, 161)
302. a + d (158, 160)
303. a − d (4, 159, 161)
304. b + c (158, 160)
305. a + c (3)
306. $a^2 - b^2$ (199, 200)
307. $a^2 - d^2$ (199, 200)
308. $b^2 - c^2$ (199, 200)
309. ϱ (1)
310. F (5).

6. Gegeben ist $\alpha + \beta$, β', δ'. Es ist $\alpha + \beta = \gamma'' + \beta' + \delta'' + \gamma' = \gamma'' + \pi - \alpha'' = \pi - (\alpha'' - \gamma'')$, also $\alpha'' - \gamma'' = \pi - (\alpha + \beta)$. Ferner ist nach (III) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha'' \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma'' = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta' \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta'$, also α'' und γ'' nach §. 6, 8 zu finden. Die Berechnung der übrigen Winkel geschieht wie in 1). Außer $\alpha + \beta$, β', δ' ist gegeben:

311. a (2, 86, 87)
312. b (2, 86, 87)
313. e (89, 90)
314. f (89, 90)
315. a + b (158, 160)
316. a − b (4, 159, 161)
317. a + d (158, 160)
318. a − d (4, 159, 161)
319. a + c (3)
320. $a^2 - b^2$ (199, 200)
321. $a^2 - d^2$ (199, 200)
322. ϱ (1)
323. F (5).

7. Gegeben ist α, β, γ. Zunächst findet man δ; dann folgt aus (I) und (II) $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha'' - \beta')}{\sin \frac{1}{2}(\delta' - \gamma'')} = \frac{\cos \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta'' - \gamma')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \delta'')} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\alpha}$, und da $\frac{1}{2}(\alpha'' - \beta') + \frac{1}{2}(\delta' - \gamma'') = \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$, und $\frac{1}{2}(\beta'' - \gamma') + \frac{1}{2}(\alpha' - \delta'') = \frac{1}{2}(\delta - \beta)$ ist, so findet man nach §. 7, 1 die Differenzen $\frac{1}{2}(\alpha'' - \beta')$, $\frac{1}{2}(\delta' - \gamma'')$, $\frac{1}{2}(\beta'' - \gamma')$, $\frac{1}{2}(\alpha' - \delta'')$, und da die entsprechenden Summen bekannt sind, sämmtliche Winkel selbst. Außer α, β, γ ist gegeben:

324. e (89, 90)
325. a + b (158, 160)
326. $a^2 - b^2$ (199, 200).

8. Gegeben ist α, γ, ε. Aus (I) und (II) erhält man die Gleichungen

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha'' - \beta')}{\sin \frac{1}{2}(\delta' - \gamma'')} = \frac{\cos \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\delta} \quad (V) \quad \text{und} \quad \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta'' - \gamma')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \delta'')} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\alpha} \quad (VI).$$

Aus der letzteren folgt $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \delta'') + \sin \frac{1}{2}(\beta'' - \gamma')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \delta'') - \sin \frac{1}{2}(\beta'' - \gamma')} = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha + \cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\alpha - \cos \frac{1}{2}\gamma}$

oder $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\delta - \beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\alpha' - \beta'' + \gamma' - \delta'')} = \cot \frac{1}{4}(\gamma + \alpha) \cot \frac{1}{4}(\gamma - \alpha)$ oder

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(\alpha' - \beta'' + \gamma' - \delta'') = \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(\gamma + \alpha) \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(\gamma - \alpha) \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(\delta - \beta) \quad (VII).$$

Auf dieselbe Weise leitet man aus (V) mit Berücksichtigung, daß

$\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\delta + \beta) = \cot \frac{1}{4}(\gamma + \alpha)$ ist, die Gleichung $\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\alpha'' - \beta' + \gamma'' - \delta') = \cot \frac{1}{4}(\gamma + \alpha) \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\gamma - \alpha) \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\delta - \beta)$ (VIII) her. Durch Division von (VII) und (VIII) ergiebt sich endlich $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\alpha' - \beta'' + \gamma' - \delta'')}{\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\alpha'' - \beta' + \gamma'' - \delta')} = \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\gamma + \alpha)^2$ (IX), und da $\frac{1}{4}(\alpha' - \beta'' + \gamma' - \delta'') + \frac{1}{4}(\alpha'' - \beta' + \gamma'' - \delta') = \varepsilon - \frac{1}{2}\pi$ ist, findet man $\frac{1}{4}(\alpha' - \beta'' + \gamma' - \delta'')$ und $\frac{1}{4}(\alpha'' - \beta' + \gamma'' - \delta')$ nach §. 6, 9. Aus (VII) oder (VIII) findet man dann $\delta - \beta$, mithin auch δ und β, da $\delta + \beta = 2\pi - \gamma - \alpha$ ist. Nun ist $\alpha'' - \beta' + \delta' - \gamma'' = \gamma - \alpha$ und $\alpha'' - \beta' - (\delta' - \gamma'')$ aus (IX) berechnet, also findet man $\alpha'' - \beta'$ und $\delta' - \gamma''$, und da ferner $\alpha'' + \beta' = \pi - \beta$, $\delta' + \gamma'' = \pi - \delta$ bekannt ist, findet man α'', β', γ'', δ'. Ganz auf dieselbe Weise findet man die vier Winkel α', β'', γ', δ''. Statt (IX) kann man auch die auf dieselbe Weise herzuleitende Gleichung $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\delta' + \beta' - \delta'' - \beta'')}{\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\alpha'' + \gamma'' - \alpha' - \gamma')} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon^2$ in Verbindung mit $\frac{1}{4}(\delta' + \beta' - \delta'' - \beta'') + \frac{1}{4}(\alpha'' + \gamma'' - \alpha' - \gamma') = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \pi)$ benutzen. Außer α, γ, ε ist gegeben:

327. a (2, 86, 87)	331. a — b (4, 159, 161)	335. $a^2 - b^2$ (199, 200)
328. e (89, 90)	332. a + d (158, 160)	336. $a^2 - d^2$ (199, 200)
329. f (89, 90)	333. a — d (4, 159, 161)	337. ϱ (1)
330. a + b (158, 160)	334. a + c (3)	338. F (5).

f) In den folgenden Aufgaben suche man die Winkel α und β wie in den Aufgaben 7, 16, 17. Die Aufgaben werden dann auf 249 zurückgeführt

339. a, ϱ, β, γ''	344. a, ϱ, $\alpha + \beta$, β'
340. a, ϱ, β, α'	345. a, ϱ, $\alpha + \beta$, $\delta'' - \gamma'$
341. a, ϱ, γ', δ''	346. a, ϱ, $\alpha - \beta$, β'
342. a, ϱ, $\beta' - \gamma''$, β	347. a, ϱ, $\alpha - \beta$, γ'
343. a, ϱ, α', γ'	348. a, ϱ, $\alpha - \beta$, α'
($\alpha + \beta$ bekannt)	349. a, ϱ, $\alpha - \beta$, $\delta'' - \gamma'$.

g) Die folgenden Aufgaben lassen sich in ähnlicher Weise auf 102 zurückführen.

350. a, c, ϱ, $\alpha + \beta$ 351. a, c, ϱ, $\alpha - \beta$ 352. ϱ, c, α, β.

h) In den folgenden Aufgaben berechne man die Winkel α und γ wie in 32, 36, 37. Die Aufgaben werden dadurch auf 261, 294 oder 337 zurückgeführt.

353. a — b, ϱ, β', γ''	358. a — b, ϱ, α, ε
354. a — b, ϱ, α, α''	359. a — b, ϱ, $\gamma + \alpha$, β'
355. a — b, ϱ, α, γ'	360. a — b, ϱ, $\gamma + \alpha$, γ'
356. a — b, ϱ, α, $\alpha'' - \delta'$	361. a — b, ϱ, $\gamma + \alpha$, $\beta' - \gamma''$
357. a — b, ϱ, α, $\beta'' - \gamma'$	362. a — b, ϱ, $\gamma + \alpha$, $\beta'' - \gamma'$

363. $a - b, \varrho, \gamma + \alpha, \varepsilon$
364. $a - b, \varrho, \gamma - \alpha, \beta'$
365. $a - b, \varrho, \gamma - \alpha, \gamma'$
366. $a - b, \varrho, \gamma - \alpha, \beta' - \gamma''$
367. $a - b, \varrho, \gamma - \alpha, \beta'' - \gamma'$
368. $a - b, \varrho, \gamma - \alpha, \varepsilon$.

i) Auf ähnliche Weise lassen sich die folgenden Aufgaben auf die erste derselben, nämlich auf 369 zurückführen.

369. $e, \varrho, \alpha, \gamma$. Aufl. Bezeichnet man den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises mit O, so ist $OA = \frac{\varrho}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$, $OC = \frac{\varrho}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$. Man kennt daher die drei Seiten des Dreiecks AOC und kann den Winkel CAO berechnen, und mit Hülfe desselben β' und γ''. Die Aufgabe ist dann zurückgeführt auf 283 oder 294.

370. $a - b, e, \alpha, \gamma$. Aufl. ρ zu finden.

371. $a - b, e, \rho, \alpha$ 372. $a - b, e, \varrho, \gamma + \alpha$ 373. $a - b, e, \varrho, \gamma - \alpha$.

§. 36.

Aufgaben über das Trapez.

a) In den folgenden Aufgaben dienen zur Berechnung von $\triangle$ ABC folgende Stücke:

1. a, β', α''
2. e, β', α''
3. b, β', α''
4. a, b, α''
5. a, b, β'
6. a, e, α''
7. a, e, β
8. b, e, β
9. a, b, β
10. b, e, α''
11. a, b, e
12. b, h, α''
13. e, h, β
14. a, h, β
15. $a + b, h, \beta'$ (§. 14, 99)
16. $a - b, h, \beta'$ (§. 14, 129)
17. $a + b, e, h$ (§. 14, 293)
18. $a - b, e, h$ (§. 14, 294)
19. a, h, α'' (§. 14, 65).

Als viertes Stück kann gegeben sein:

α) c
β) d
γ) α
δ) γ''
ε) $c + d$ (§. 14, 70)
ζ) $c - d$ (§. 14, 71)
η) $c^2 - d^2$ (§. 14, 74)
ϑ) F (§. 14, 59)
ι) f
$\varkappa$) γ'
λ) β''
μ) ε
ν) α'.

In den Fällen α) bis ϑ) ist $\triangle$ ACD zu berechnen; in ι) bis μ) sind $\triangle$ BCD und $\triangle$ ADC zu berechnen; in ν) $\triangle$ ABD und $\triangle$ ADC.

Diejenigen Aufgaben, in denen nur die vier Hauptfälle in Anwendung kommen, sind bereits §. 24 angeführt.

b) Zieht man durch C eine Parallele zu AD, welche AB in F trifft, so ist $CF = d$, $FB = a - c$, $\angle CFB = \alpha$, $\angle FCB = \pi - (\alpha + \beta)$. Zur Berechnung von $\triangle$ FBC können folgende Stücke gegeben sein:

1. b, α, β
2. $a - c, \alpha, \beta$
3. b, d, α
4. $a - c, b, \alpha$
5. $a - c, b, \alpha + \beta$
6. $b, d, \alpha + \beta$

7. b, d, $\alpha - \beta$ (§. 14, 78)
8. $a - c$, b, β
9. $a - c$, b, d
10. $b + d$, α, β (§. 14, 1)
11. $b - d$, α, β (§. 14, 2)
12. $a - c$, $b + d$, α (§. 14, 70)
13. $a - c$, $b - d$, α (§. 14, 71)
14. $a - c$, $b + d$, $\alpha + \beta$ (§. 14, 51)
15. $a - c$, $b - d$, $\alpha + \beta$ (§. 14, 53)
16. $a - c$, $b + d$, $\alpha - \beta$ (§. 14, 52)
17. $a - c$, $b - d$, $\alpha - \beta$ (§. 14, 54)
18. $b^2 - d^2$, α, β (§. 14, 12)
19. $b^2 - d^2$, $a - c$, $\alpha + \beta$ (§. 14, 62)
20. $b^2 - d^2$, $a - c$, $\alpha - \beta$ (§. 14, 63)
21. h, α, β
22. b, h, α
23. b, d, h
24. $a - c$, h, $\alpha + \beta$ (§. 14, 65)
25. $a - c$, h, $\alpha - \beta$ (§. 14, 66)
26. $b + d$, h, $\alpha + \beta$ (§. 14, 105)
27. $b - d$, h, $\alpha + \beta$ (§. 14, 137)
28. $b + d$, h, $\alpha - \beta$ (§. 14, 106)
29. $b - d$, h, $\alpha - \beta$ (§. 14, 138)
30. $b + d + a - c$, α, β (§. 14, 3)
31. $b + d + a - c$, h, $\alpha + \beta$ (§. 14, 148)
32. $b + d + a - c$, h, $\alpha - \beta$ (§. 14, 149)
33. $a - c$, $b + d$, h (§. 14, 450)
34. $a - c$, $b - d$, h (§. 14, 452).

Als viertes Stück kann gegeben sein:

α) α'' β) γ'' γ) β' δ) a ε) c ζ) $a + c$ η) c ϑ) α' ι) γ' $\varkappa$) β'' λ) F.

In den Fällen α) bis η) findet man die gesuchten Stücke durch Berechnung von $\triangle$ ABC oder ADC. In den Fällen ϑ) bis $\varkappa$) ist $\triangle$ BCD zu berechnen. Ist endlich F gegeben, so kann man h aus $\triangle$ FBC berechnen und findet dann $a + c = \frac{2\,F}{h}$. Die fehlenden Stücke lassen sich dann aus $\triangle$ ABC oder $\triangle$ ADC berechnen. Für die Aufgaben, in denen α' und γ' gegeben ist, beachte man, daß $\alpha' - \gamma' = \pi - (\alpha + \beta)$ ist.

c) Die folgenden Aufgaben lassen sich nach dem unter b) angegebenen Verfahren lösen, finden sich aber nicht unter den aus Combination von 1) bis 34) und α) bis λ) gebildeten Aufgaben.

1. a, c, α, β
2. a, b, c, α
3. a, b, c, $\alpha + \beta$
4. a, b, c, d
5. $b + d$, a, c, α
6. $b - d$, a, c, α
7. $a - c$, $b + d$, β', γ''
8. $a - c$, $b - d$, β', γ''
9. a, c, $b + d$, $\alpha + \beta$
10. a, c, $b - d$, $\alpha + \beta$
11. a, c, $b + d$, $\alpha - \beta$
12. a, c, $b - d$, $\alpha - \beta$
13. $b^2 - d^2$, a, c, $\alpha + \beta$
14. $b^2 - d^2$, a, c, $\alpha - \beta$
15. a, c, h, $\alpha + \beta$
16. F, h, α, β
17. F, $a + c$, α, β
18. F, $a + c$, b, α
19. F, a, h, $\alpha + \beta$
20. F, a, c, $\alpha + \beta$
21. a, c, h, $\alpha - \beta$
22. F, a, h, $\alpha - \beta$
23. F, a, c, $\alpha - \beta$
24. $b + d$, $a + c$, F, $\alpha + \beta$
25. $b - d$, $a + c$, F, $\alpha + \beta$
26. $b + d$, $a + c$, F, $\alpha - \beta$
27. $b - d$, $a + c$, F, $\alpha - \beta$
28. $b + d + a - c$, α'', β', γ''
29. $a - c$, $b + d$, α', γ'
30. $a - c$, $b - d$, α', γ'
31. $a - c$, $b^2 - d^2$, α', γ'
32. a, c, $b + d$, h
33. a, c, $b - d$, h.

d) Zieht man durch C zu BD eine Parallele, die die Verlängerung von AB in G trifft, so ist $BG = c$, $AG = a + c$, $CG = f$,

$\angle$ CGB $= \beta''$, $\angle$ ACG $= \varepsilon$. Da $\triangle$ CBG $=$ ADC ist, so ist der Inhalt von $\triangle$ AGC $=$ F. Zur Berechnung von $\triangle$ AGC können folgende Stücke gegeben sein:

1. $a + c, \beta', \beta''$
2. e, β', β''
3. e, f, β'
4. $a + c, e, \beta''$
5. $a + c, e, \varepsilon$
6. e, f, ε
7. $a + c, e, \beta'$
8. $a + c, e, f$
9. $a + c, h, \beta'$
10. $f + e, \beta', \beta''$ (§. 14, 1)
11. $f - e, \beta', \beta''$ (§. 14, 2)
12. $a + c, f + e, \varepsilon$ (§. 14, 51)
13. $a + c, f - e, \varepsilon$ (§. 14, 53)
14. $a + c, f + e, \beta'$ (§. 14, 70)
15. $a + c, f - e, \beta'$ (§. 14, 71)
16. $a + c, f + e, \beta' - \beta''$ (§. 14, 52)
17. $a + c, f - e, \beta' - \beta''$ (§. 14, 54)
18. $e, f, \beta' - \beta''$ (§. 14, 78)
19. $f^2 - e^2, \beta', \beta''$ (§. 14, 12)
20. $f^2 - e^2, a + c, \varepsilon$ (§. 14, 62)
21. $f^2 - e^2, a + c, \beta' - \beta''$ (§. 14, 63)
22. e, h, ε
23. e, f, h
24. e, h, β''
25. $a + c, e, h$
26. $a + c, h, \varepsilon$ (§. 14, 65)
27. $a + c, h, \beta' - \beta''$ (§. 14, 66)
28. $a + c, f + e, h$ (§. 14, 450)
29. $a + c, f - e, h$ (§. 14, 452)
30. $f + e, h, \varepsilon$ (§. 14, 105)
31. $f - e, h, \varepsilon$ (§. 14, 137)
32. $f + e, h, \beta' - \beta''$ (§. 14, 106)
33. $f - e, h, \beta' - \beta''$ (§. 14, 138)
34. F, β', β'' (§. 14, 10)
35. $F, a + c, \varepsilon$ (§. 14, 68)
36. F, h, ε (§. 14, 182)
37. F, f, β' (§. 14, 68)
38. F, e, f
39. $F, a + c, \beta'$
40. F, e, β'
41. F, h, β'
42. $F, a + c, e$
43. F, e, h
44. $F, h, \beta' - \beta''$ (§. 14, 191)
45. $F, a + c, \beta' - \beta''$ (§. 14, 69)
46. F, e, ε
47. $F, f + e, \varepsilon$ (§. 14, 92)
48. $F, f - e, \varepsilon$ (§. 14, 120).

Als viertes Stück kann gegeben sein:

α) a δ) b η) γ' $\varkappa$) d μ) α' ξ) $c + d$
β) c ε) β ϑ) $a + b$ λ) α ν) γ'' o) $c - d$.
γ) $a - c$ ζ) α'' ι) $a - b$

In den Fällen α) bis ι) kann man nach der Berechnung von $\triangle$ AGC zunächst $\triangle$ ABC berechnen (in den beiden letzten Fällen nach §. 14, 70, 71), und dann ADC nach dem dritten Hauptfalle. In den Fällen $\varkappa$) bis o) läßt sich nach Berechnung von $\triangle$ AGC zunächst $\triangle$ ADC (in den beiden letzten Fällen nach §. 14, 70, 71), dann $\triangle$ ABC berechnen.

e) Die folgenden Aufgaben lassen sich nach dem unter d) angegebenen Verfahren lösen, finden sich aber nicht unter den aus Combination von 1) bis 48) und α) bis o) gebildeten Aufgaben.

34. a, c, e, β''
35. a, c, e, ε
36. $a + c, e, \alpha', \gamma''$
37. e, f, α', γ''
38. a, c, e, f
39. $a, c, f + e, \varepsilon$

40. $a, c, f - e, \varepsilon$
41. $a + c, f + e, \alpha', \gamma''$
42. $a + c, f - e, \alpha', \gamma''$
43. $a, c, f + e, \beta'$
44. $a, c, f - e, \beta'$
45. $a, c, f + e, \beta' - \beta''$
46. $a, c, f - e, \beta' - \beta''$
47. $f^2 - e^2, a, c, \varepsilon$
48. $f^2 - e^2, a + c, \alpha', \gamma''$
49. $f^2 - e^2, a, c, \beta' - \beta''$
50. e, h, α', γ''
51. a, c, h, ε
52. $a + c, h, \alpha', \gamma''$
53. $a, c, h, \beta' - \beta''$
54. $a, c, f + e, h$
55. $a, c, f - e, h$
56. $f + e, h, \alpha', \gamma''$
57. $f - e, h, \alpha', \gamma''$
58. F, a, c, ε
59. $F, a + c, \alpha', \gamma''$
60. F, h, α', γ''
61. F, a, c, β'
62. F, a, c, e
63. $F, a, c, \beta' - \beta''$
64. F, e, α', γ''
65. $F, f + e, \alpha', \gamma''$
66. $F, f - e, \alpha', \gamma''$.

f) In den folgenden Aufgaben läßt sich h leicht berechnen und dieselben sind dann auf Aufgaben unter der Gruppe d) zurückgeführt.

67. $a + c, b, \beta, \varepsilon$
68. $a + c, b, \beta, \beta' - \beta''$
69. $a + c, f + e, b, \beta$
70. $a + c, f - e, b, \beta$
71. $f + e, b, \beta, \varepsilon$
72. $f - e, b, \beta, \varepsilon$
73. $f + e, b, \beta, \beta' - \beta''$
74. $f - e, b, \beta, \beta' - \beta''$
75. F, b, β, ε
76. $F, b, \beta, \beta' - \beta''$.

g) Die Gestalt des Trapezes ist durch drei Winkel bestimmt, so daß sich aus drei beliebigen von einander unabhängigen Winkeln des Trapezes sämmtliche übrigen berechnen lassen müssen. Einige Fälle, in denen die Berechnung sich einfach gestaltet, mögen hier angeführt werden. Aus den mittelst des Sinussatzes sich leicht ergebenden Gleichungen $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$, $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'}$, $\frac{c}{d} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\beta'}$, $\frac{d}{a} = \frac{\sin\beta''}{\sin\alpha'}$ folgt durch Multiplication $\sin\alpha' \sin\gamma' \sin\beta'^2 = \sin\alpha'' \sin\gamma'' \sin\beta''^2$ (I). Setzt man in diese Gleichung für α', α'', γ', γ'' ihre Werthe $\alpha' = \pi - (\alpha + \beta''$, $\alpha'' = \pi - (\beta + \beta')$, $\gamma' = \beta - \beta''$, $\gamma'' = \alpha - \beta'$ ein, so erhält man nach einigen Transformationen $\cot\beta - \cot\alpha = \cot\beta'' - \cot\beta'$ (II). Einfacher ergiebt sich dieselbe Gleichung direct auf folgende Weise. Fällt man auf AB die Senkrechte CM, so ist $AM = h \cot\beta'$, $MB = h \cot\beta$, daher $a = AM + MB = h(\cot\beta' + \cot\beta)$. Aus dem Dreiecke ABD ergiebt sich ebenso $a = h(\cot\beta'' + \cot\alpha)$. Aus beiden Gleichungen folgt $\cot\beta' + \cot\beta = \cot\beta'' + \cot\alpha$ oder $\cot\beta - \cot\alpha = \cot\beta'' - \cot\beta'$ (II). Durch Multiplication von $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$, $\frac{b}{f} = \frac{\sin\beta''}{\sin\beta}$, $\frac{f}{a} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$ erhält man $\sin\alpha \sin\alpha'' \sin\beta'' = \sin\beta \sin\alpha' \sin\beta'$ (III), ebenso leitet man $\sin\alpha \sin\beta' \sin\gamma' = \sin\beta \sin\beta'' \sin\gamma''$ (IV) her. Beide Gleichungen lassen sich auch aus (I) herleiten. Durch Multiplication von (III) und (IV) erhält man $\sin\alpha^2 \sin\alpha'' \sin\gamma' = \sin\beta^2 \sin\alpha' \sin\gamma''$ (V).

1. Gegeben sei β', β'', γ'. 1. Aufl. Zunächst findet man α''. Aus (I) folgt $\frac{\sin\gamma''}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\gamma' \sin\beta'^2}{\sin\alpha'' \sin\beta''^2}$, und da $\gamma'' + \alpha' = \alpha'' + \gamma'$

ist, kann man γ'' und α' nach §. 7, 1 berechnen. 2. Aufl. Aus (IV) folgt $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma''} = \frac{\sin\beta \sin\beta''}{\sin\beta' \sin\gamma'}$, und da $\alpha - \gamma'' = \beta'$ ist, kann man α und γ'' nach §. 7, 2 berechnen. Die Aufgaben sind dadurch, wie in den folgenden Fällen, auf Aufgaben früherer Gruppen zurückgeführt. Außer β', β'' und γ' ist gegeben:

77. d	79. b + d	81. c + d	83. $b^2 - d^2$
78. a — c	80. b — d	82. c — d	84. $c^2 - d^2$.

2. Gegeben sei α', α'', γ'. 1. Aufl. Zunächst findet man γ''. Nach (I) ist dann $\frac{\sin\beta'}{\sin\beta''} = \sqrt{\frac{\sin\alpha''\sin\gamma''}{\sin\alpha' \sin\gamma'}}$ und $\beta' + \beta'' = \pi - (\alpha'' + \gamma')$ (§. 7, 1). 2. Aufl. Aus (V) folgt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{\sin\alpha' \sin\gamma''}{\sin\alpha'' \sin\gamma'}}$, und ferner ist $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ (§. 7, 1). Außer α', α'', γ' ist gegeben:

85. a	89. F	93. a — c	97. f — e
86. b	90. a + b	94. b + d	98. $a^2 - b^2$
87. e	91. a — b	95. b — d	99. $b^2 - d^2$
88. h	92. a + c	96. f + e	100. $f^2 - e^2$.

3. Gegeben ist β', α'', γ''. 1. Aufl. Zunächst findet man $\alpha = \beta' + \gamma''$ und $\beta = \pi - (\beta' + \alpha'')$. Dann ergiebt sich β'' nach (II) aus der Gleichung $\cot\beta'' = \cot\beta' + \cot\beta - \cot\alpha = \cot\beta + \frac{\sin\gamma''}{\sin\alpha \sin\beta''}$. 2. Aufl. Nachdem α und β gefunden sind, ergiebt (IV) $\frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'} = \frac{\sin\alpha \sin\beta'}{\sin\beta \sin\gamma''}$, wobei $\beta'' + \gamma' = \beta$ ist (§. 7, 1). Außer β', α'', γ'' ist gegeben:

101. f	103. f + e	105. $f^2 - e^2$	106. F.
102. a + c	104. f — e		

4. Gegeben ist α, β, ε. Nach (II) ist $\cot\beta'' - \cot\beta' = \cot\beta - \cot\alpha = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$ und $\beta'' + \beta' = \pi - \varepsilon$ (§. 4, 19). Außer α, β, ε ist gegeben:

107. a	111. a + b	115. b + d	119. F
108. b	112. a — b	116. b — d	120. $a^2 - b^2$
109. e	113. a + c	117. f + e	121. $b^2 - d^2$
110. h	114. a — c	118. f — e	122. $f^2 - e^2$.

5. Gegeben sei α, β, $\beta' - \beta''$. Man findet β' und β'' ähnlich wie in 4) nach §. 4, 20. Außer α, β, $\beta' - \beta''$ ist gegeben:

123. a	124. b	125. c	126. h

127. a + b	130. a — c	133. f + e	136. $a^2 - b^2$
128. a — b	131. b + d	134. f — e	137. $b^2 - d^2$
129. a + c	132. b — d	135. F	138. $f^2 - e^2$.

6. Gegeben ist β', β'', $\alpha + \beta$. Nach (II) ist $\cot\beta - \cot\alpha = \cot\beta'' - \cot\beta' = \frac{\sin(\beta' - \beta'')}{\sin\beta' \sin\beta''}$ (§. 4, 19). Außer β', β'', $\alpha + \beta$ ist gegeben:

139. a	143. a — b	147. b — d	151. $a^2 - b^2$
140. b	144. a + c	148. f + e	152. $b^2 - d^2$
141. e	145. a — c	149. f — e	153. $f^2 - e^2$.
142. a + b	146. b + d	150. F	

7. Gegeben sei β', β'', $\alpha - \beta$. Aehnlich wie in 6) sind α und β nach §. 4, 20 zu berechnen. Außer β', β'', $\alpha - \beta$ ist gegeben:

154. a	158. a — b	162. b — d	166. $a^2 - b^2$
155. b	159. a + c	163. f + e	167. $b^2 - d^2$
156. c	160. a — c	164. f — e	168. $f^2 - e^2$
157. a + b	161. b + d	165. F	

8. Gegeben sei α', α'', β'. 1. Aufl. Zunächst findet man β. Dann ist nach (II) $\cot\alpha + \cot\beta'' = \cot\beta + \cot\beta' = \frac{\sin(\beta + \beta')}{\sin\beta \sin\beta'}$, und $\alpha + \beta'' = \pi - \alpha''$ (§. 4, 17). 2. Aufl. Aus (III) folgt $\sin\alpha \sin\beta'' = \frac{\sin\beta \sin\alpha' \sin\beta'}{\sin\alpha''}$, wobei $\alpha + \beta'' = \pi - \alpha'$ ist (§. 6, 1).

Außer α', α'', β' ist gegeben:

169. c	174. a + b	179. b — d	183. $a^2 - b^2$
170. d	175. a — b	180. f + e	184. $c^2 - d^2$
171. f	176. c + d	181. f — e	185. $b^2 - d^2$
172. a + c	177. c — d	182. F	186. $f^2 - e^2$.
173. a — c	178. b + d		

h) Zu den Aufgaben 187 bis 213 sind je drei unter b) 1 bis 34 angeführte Stücke, welche zur Berechnung von △ FBC dienen, (allerdings mit Ausschluß von 1, 2, 10, 11, 18, 21, 30) gegeben. Als viertes gegebenes Stück tritt ε hinzu. Die Aufgaben sind nach Berechnung von α und β auf die unter g), 4) zurückgeführt.

i) Zu den Aufgaben 214 bis 297 sind je drei unter d) 1 bis 48 angeführte Stücke, welche zur Berechnung des Dreiecks AGC dienen (mit Ausschluß von 1, 2, 10, 11, 19, 34), gegeben. Als viertes gegebenes Stück tritt $\alpha + \beta$ oder $\alpha - \beta$ hinzu. Nach Berechnung von β' und β'' sind die Aufgaben auf die unter g), 6) und 7) zurückgeführt.

k) In den folgenden Aufgaben kommt die unter b) gegebene Construction in Anwendung. Drei der gegebenen Stücke bestimmen Dreieck FBC, das vierte ist f + e oder f — e. Die Aufgaben entstehen durch Combination von f + e oder f — e mit den unter b) 1 bis 34 aufgeführten. Nur zwei Aufgaben mögen mit einer Auflösung versehen werden, da sämmtliche anderen sich auf dieselben zurückführen oder sich auch in ähnlicher Weise direkt berechnen lassen.

298. $f + e = s, h, \alpha, \beta$. Aufl. Da $f = \frac{h}{\sin\beta''}$, $e = \frac{h}{\sin\beta'}$, so ist $s = \frac{h(\sin\beta' + \sin\beta'')}{\sin\beta' \sin\beta''}$. Ferner ist nach g) (II) $\frac{\sin(\beta' - \beta'')}{\sin\beta' \sin\beta''} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$. Durch Division beider Gleichungen erhält man $\frac{\sin{}^1/_2(\beta' + \beta'')}{\sin{}^1/_2(\beta' - \beta'')} = \frac{s \sin\alpha \sin\beta}{h \sin(\alpha - \beta)}$. Aus dieser und der letzten der beiden anderen Gleichungen, welche man leicht auf die Form $2\sin(\beta' - \beta'') = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}\cos(\beta' - \beta'') - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$
$\cos(\beta' + \beta'') = \frac{2\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}\sin{}^1/_2(\beta' + \beta'')^2 - \frac{2\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$
$\sin{}^1/_2(\beta' - \beta'')^2$ erhält man $\cot{}^1/_2(\beta' - \beta'') = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2\sin\alpha \sin\beta}$
$\left(\frac{s^2 \sin\alpha^2 \sin\beta^2}{h^2 \sin(\alpha - \beta)^2} - 1\right)$ und $\sin{}^1/_2(\beta' + \beta'' =$
$\frac{s \sin{}^1/_2(\beta' - \beta'') \sin\alpha \sin\beta}{h \sin(\alpha - \beta)}$. Hat man auf diese Weise sämmtliche Winkel berechnet, so ist die Aufgabe auf sehr einfache Trapezaufgaben zurückgeführt.

299. $f - e = g, h, \alpha, \beta$. Ein ähnliches Verfahren wie in 298 ergiebt $\mathrm{tg}\,{}^1/_2(\beta' - \beta'') = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2\sin\alpha \sin\beta}\left(1 - \frac{g^2 \sin\alpha^2 \sin\beta^2}{h^2 \sin(\alpha - \beta)^2}\right)$ und
$\cos{}^1/_2(\beta' + \beta'') = \frac{g \cos{}^1/_2(\beta' - \beta'') \sin\alpha \sin\beta}{h \sin(\alpha - \beta)}$.

l) In den Aufgaben 366 bis 461 kommt die unter d) angegebene Construction in Anwendung. Aus dreien der gegebenen Stücke läßt sich Dreieck AGC berechnen, das vierte ist b + d oder b — d. Die Aufgaben werden gebildet durch Combination der unter d) 1 bis 48 aufgeführten Stücke mit b + d oder b — d. Nur an einer der Aufgaben wird die Berechnung hier ausgeführt.

366. $b + d, h, \beta', \beta''$. Aufl. ähnlich wie 298. Zunächst ist $\alpha - \beta$ und dann $\alpha + \beta$ zu berechnen.

m) In den folgenden Aufgaben sind a, c und zwei Winkel gegeben. Es ist $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$ und $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'}$, folglich $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{\sin\alpha''\sin\beta''}{\sin\beta'\ \sin\gamma'}$ (I). Durch eine ähnliche Behandlung der Verhältnisse $\frac{a}{d}$ und $\frac{d}{c}$, $\frac{a}{e}$ und $\frac{e}{c}$, $\frac{a}{f}$ und $\frac{f}{c}$ erhält man die Gleichungen $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha'\ \sin\beta'}{\sin\beta''\ \sin\gamma''}$ (II), $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha\ \sin\alpha''}{\sin\beta\ \sin\gamma''}$ (III), $\frac{a}{c} = \frac{\sin\beta\ \sin\alpha'}{\sin\alpha\ \sin\gamma'}$ (IV). Mit Zuhülfenahme der Construction unter g) findet man ebenso durch Multiplication der Verhältnisse $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a-c}$, $\frac{a}{d}$ und $\frac{d}{a-c}$, $\frac{a-c}{b}$ und $\frac{b}{c}$, $\frac{a-c}{d}$ und $\frac{d}{c}$ die Gleichungen $\frac{a}{a-c} = \frac{\sin\alpha\ \sin\alpha''}{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta'}$ (V), $\frac{a}{a-c} = \frac{\sin\beta\ \sin\alpha'}{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta''}$ (VI), $\frac{a-c}{c} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta''}{\sin\alpha\ \sin\gamma'}$ (VII), $\frac{a-c}{c} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta'}{\sin\beta\ \sin\gamma''}$ (VIII). Mit Zuhülfenahme der Construction unter h) findet man durch ein ganz ähnliches Verfahren die Gleichungen $\frac{a+c}{a} = \frac{\sin\varepsilon\ \sin\alpha}{\sin\alpha'\ \sin\beta'}$ (IX), $\frac{a+c}{a} = \frac{\sin\varepsilon\ \sin\beta}{\sin\alpha''\ \sin\beta''}$ (X), $\frac{a+c}{c} = \frac{\sin\varepsilon\ \sin\beta}{\sin\beta'\ \sin\gamma'}$ (XI), $\frac{a+c}{c} = \frac{\sin\varepsilon\ \sin\alpha}{\sin\beta''\sin\gamma''}$ (XII). Endlich erhält man noch durch Multiplication von (III) und (IV) $\frac{a^2}{c^2} = \frac{\sin\alpha'\ \sin\alpha''}{\sin\gamma'\ \sin\gamma''}$ (XIII), ebenso durch Division von (IX) und (V) $\frac{a^2-c^2}{a^2} = \frac{\sin\varepsilon\ \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha'\ \sin\alpha''}$ (XIV), und durch Multiplication von (VIII) und (XI) $\frac{a^2-c^2}{c^2} = \frac{\sin\varepsilon\ \sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma'\ \sin\gamma''}$ (XV). Jede dieser Gleichungen enthält die Seiten a, c und vier Winkel, zwischen denen aber jedesmal eine einfache Gleichung besteht. So tritt z. B. zu (I) die Gleichung $\alpha'' + \beta' + \gamma' + \beta'' = \pi$, zu (IX) die Gleichung $\varepsilon - \alpha' = \alpha - \beta'$, zu (XIV) die Gleichung $\varepsilon - \alpha' = \alpha'' + (\alpha+\beta) - \pi$ u. s. w. hinzu.

Sind nun a und c gegeben und außerdem zwei in einer der Gleichungen (I) bis (XV) enthaltenen Winkel, so liefert diese Gleichung den Quotienten oder das Product der Sinus zweier anderen Winkel;

und aus der entsprechenden Winkelgleichung findet man außerdem die Summe oder Differenz derselben unbekannten Winkel, so daß man dieselben nach §. 6, 1, 2 oder §. 7, 1, 2 berechnen kann. Die Aufgaben sind dann entweder auf einfache Trapezaufgaben in §. 24 oder auf solche unter k) zurückgeführt. Außer a und c ist gegeben:

462. α'', γ'. Aufl. (I), (X), (XI), (XIII), (XV).

463. α'', β''. Aufl. (I), (X).

464. α', γ'. Aufl. (IV), (XIII), oder da $\alpha + \beta = \pi - (\alpha' - \gamma')$ ist, mit Hülfe von (VI), (XIV), (XV).

465. α, α''. Aufl. (III), (V).

466. $\alpha + \beta$, β'. Aufl. (V).

467. α, ε. Aufl. (IX), (XII).

468. α', α''. Aufl. (XIII), (XIV).

469. ε, $\alpha + \beta$. Aufl. (XIV), (XV).

n) Es ist $\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha''}$, $\frac{a}{d} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta''}$, folglich $\frac{b}{d} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{d} = \frac{\sin\alpha' \sin\beta'}{\sin\alpha'' \sin\beta''}$. Auf ähnliche Weise erhält man $\frac{b}{d} = \frac{\sin\gamma'' \sin\beta''}{\sin\gamma' \sin\beta'}$. Durch Multiplication beider Gleichungen erhält man $\frac{b^2}{d^2} = \frac{\sin\alpha' \sin\gamma''}{\sin\alpha'' \sin\gamma'}$. Ganz ebenso leitet man die Gleichung $\frac{e^2}{f^2} = \frac{\sin\alpha' \sin\gamma'}{\sin\alpha'' \sin\gamma''}$ her. Ist nun b, d und zwei der Winkel α', α'', γ', γ'' gegeben, so kennt man von den anderen beiden den Quotienten oder das Product der Sinus und vermöge der Gleichung $\alpha' + \gamma'' = \alpha'' + \gamma'$ noch die Summe oder Differenz, so daß man diese beiden Winkel nach §. 6, 1, 2 oder §. 7, 1, 2 finden kann. Die Aufgabe ist dann auf 86 zurückgeführt. Aehnlich ist das Verfahren, wenn e, f und zwei der Winkel α', α'', γ', γ'' gegeben sind. Die Aufgabe wird dann auf 87 zurückgeführt.

470. b, d, α', γ' 472. b, d, α', γ'' 474. e, f, α', α''

471. b, d, α', α'' 473. e, f, α', γ' 475. e, f, α', γ''.

o) 476. b, d, ε, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. Aus der in n) entwickelten Gleichung $\frac{b^2}{d^2} = \frac{\sin\alpha' \sin\gamma''}{\sin\alpha'' \sin\gamma'}$ erhält man durch einfache Entwicklung, indem man beachtet, daß $\alpha' - \gamma' = \alpha'' - \gamma'' = \pi - \sigma$ ist,

$$\frac{b^2}{d^2} = \frac{\cos(\alpha' - \gamma'') - \cos(\alpha' + \gamma'')}{\cos(\alpha'' - \gamma') - \cos(\alpha'' + \gamma')} = \frac{\cos(\alpha' - \gamma'') - \cos\varepsilon}{\cos(\alpha'' - \gamma') - \cos\varepsilon},$$

folglich $$\frac{b^2 + d^2}{b^2 - d^2} = \frac{\cos(\alpha' - \gamma'') + \cos(\alpha'' - \gamma') - 2\cos\varepsilon}{\cos(\alpha' - \gamma'') - \cos(\alpha'' - \gamma')},$$

$$= - \frac{\cos\sigma \cos {}^1\!/_2 (\alpha'' - \gamma' - \alpha' + \gamma'') + \cos\varepsilon}{\sin\sigma \sin {}^1\!/_2 (\alpha'' - \gamma' - \alpha' + \gamma'')}.$$ Führt man noch einen Hülfswinkel ein, indem man $\frac{b}{d} = \cot\varkappa$ setzt, so erhält man

die Gleichung $\cos {}^1/_2 (\alpha'' - \gamma' - \alpha' + \gamma'') + \frac{\mathrm{tg}\,\sigma}{\cos 2\varkappa} \sin {}^1/_2 (\alpha'' - \gamma' - \alpha' + \gamma'') = -\frac{\cos \varepsilon}{\cos \sigma}$. Hat man aus derselben ${}^1/_2 (\alpha'' - \gamma' - \alpha' + \gamma'')$ nach §. 3, 1 berechnet, so findet man, da ${}^1/_2 (\alpha'' + \gamma' + \alpha' + \gamma'') = \varepsilon$ ist, die Winkel $\alpha'' + \gamma''$ und $\alpha' + \gamma'$, und somit auch α'', γ'', α', γ', da man $\alpha'' - \gamma''$ und $\alpha' - \gamma'$ kennt. Die Aufgabe ist somit auf 86 zurückgeführt.

477. e, f, ε, $\alpha + \beta = \sigma$. Aufl. mittelst der Gleichung $\frac{e^2}{f^2} = \frac{\sin \alpha' \sin \gamma'}{\sin \alpha'' \sin \gamma''}$ ähnlich wie 476 auf 87 zurückzuführen.

478. e, f, α, β. 1. Aufl. Nach g), (II) ist $\cot \beta'' - \cot \beta' = \cot \beta - \cot \alpha$, ferner $\frac{\sin \beta'}{\sin \beta''} = \frac{f}{e}$. Die beiden Gleichungen lassen sich leicht auf die Form $\frac{\sin (\beta' - \beta'')}{\cos (\beta' - \beta'') - \cos (\beta' + \beta'')} = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)}$ und $\frac{\mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\beta' + \beta'')}{\mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\beta' - \beta'')} = \frac{f + e}{f - e}$ bringen. Eliminirt man $(\beta' + \beta'')$, so gelangt man zu der Gleichung $\cos (\beta' - \beta'') + \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \sin (\beta' - \beta'') = \frac{f^2 + e^2}{2\,ef}$ oder, wenn man für $\beta' - \beta''$ den halben Winkel einführt, $(f + e)^2 \mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\beta' - \beta'')^2 - \frac{2\,ef \sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\beta' - \beta'') + (f - e)^2 = 0$.

2. Aufl. Durch leichte Entwicklung findet man [vergl. n)] $\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'} = \frac{f \sin \beta}{e \sin \alpha}$ und $\frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma'} = \frac{f \sin \alpha}{e \sin \beta}$. Hieraus leitet man, indem man $\frac{e}{f} = \mathrm{tg}\,\varkappa$, $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \mathrm{tg}\,\lambda$ setzt, $\frac{\mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\alpha'' + \alpha')}{\mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\alpha'' - \alpha')} = \frac{\sin (\lambda + \varkappa)}{\sin (\lambda - \varkappa)}$ und $\frac{\mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\gamma'' + \gamma')}{\mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\gamma'' - \gamma')} = \frac{\cos (\lambda - \varkappa)}{\cos (\lambda + \varkappa)}$ her. Dividirt man Beides, so erhält man unter Berücksichtigung von $\alpha'' - \alpha' = \gamma'' - \gamma'$ die Gleichung $\frac{\mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\alpha'' + \alpha')}{\mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\gamma'' + \gamma')} = \frac{\sin 2 (\lambda + \varkappa)}{\sin 2 (\lambda - \varkappa)}$. Da ${}^1/_2 (\alpha'' + \alpha') - {}^1/_2 (\gamma'' + \gamma') = \pi - \sigma$ ist, so findet man ${}^1/_2 (\alpha'' + \alpha')$ und ${}^1/_2 (\gamma'' + \gamma')$ nach §. 6, 10. Man erhält $\sin (\alpha'' + \alpha' + \gamma'' + \gamma') = \sin \varepsilon = \mathrm{tg}\, 2\lambda \cot 2\varkappa \sin (\alpha + \beta)$ und $\mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\alpha'' - \alpha') = \frac{\sin (\lambda - \varkappa) \mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\alpha'' + \alpha')}{\sin (\lambda + \varkappa)}$, $\mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\gamma'' - \gamma') = \frac{\cos (\lambda + \varkappa) \mathrm{tg}\, {}^1/_2 (\gamma'' + \gamma')}{\cos (\lambda - \varkappa)}$.

479. b, d, β', β''. Aufl. ähnlich wie 478.

480. a, c, e, α'. Aufl. Aus $\frac{a+c}{e} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta''}$ und $\frac{c}{e} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\varepsilon-\alpha')}{\sin(\alpha'+\beta'')}$ erhält man $\frac{a+c+e}{a+c-e} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon+\beta'')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon-\beta'')}$ und $\frac{e+c}{e-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon+\beta'')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\alpha'-\varepsilon+\beta'')}$. Dividirt man beide Gleichungen, so ergiebt sich $\frac{\operatorname{tg}(\alpha'-\frac{1}{2}(\varepsilon-\beta''))}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varepsilon-\beta'')} = \frac{(a+c+e)(e-c)}{(a+c-e)(e+c)}$ (§. 6, 9).

481. a, c, e, $\alpha+\beta=\sigma$. Aufl. Aus $\frac{a}{e} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta}$ und $\frac{c}{e} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\alpha}$ erhält man $\frac{e+a}{e-a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\alpha'')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\alpha'')}$ und $\frac{e+c}{e-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\gamma'')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\gamma'')}$. Dividirt man beide Gleichungen, so erhält man $\frac{(e-a)(e+c)}{(e+a)(e-c)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\gamma'')\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\alpha'')$. Ferner ist $\frac{1}{2}(\alpha+\gamma'') + \frac{1}{2}(\beta-\alpha'') = \sigma - \frac{1}{2}\pi$ (§. 6, 7).

482. a, b, c, ε. Aufl. Aus $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$ und $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'}$ findet man $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha''+\beta')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}$ und $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta''+\gamma')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')}$ und durch Multiplication beider Gleichungen $\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)} = \cot\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')\cot\frac{1}{2}(\beta''-\gamma')$, wobei $\frac{1}{2}(\alpha''-\beta') - \frac{1}{2}(\beta''-\gamma') = \varepsilon - \frac{1}{2}\pi$ ist (§. 6, 12).

483. a, b, c, α'. Aufl. ähnlich wie 482, indem man die Gleichungen $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'}$ und $\frac{a-c}{b} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$ benutzt.

484. b, d, e, f. 1. Aufl. Es ist $a^2 = f^2 + d^2 - 2fd\cos\alpha' = e^2 + b^2 - 2eb\cos\alpha''$, ferner, da $\triangle$ ABD $= \triangle$ ABC ist, $fd\sin\alpha' = eb\sin\alpha''$. Die Gleichungen lassen sich in der Form $2fd\cos\alpha' - 2eb\cos\alpha'' = f^2 + d^2 - e^2 - b^2$ und $2fd\sin\alpha' - 2eb\sin\alpha'' = 0$ schreiben. Indem man beide quadrirt und addirt, ergiebt sich $\cos(\alpha''-\alpha') = \frac{4f^2d^2 + 4e^2b^2 - (f^2+d^2-e^2-b^2)^2}{8febd}$. Elegantere Ausdrücke ergeben sich auf bekannte Weise für die Funktionen von $\frac{1}{2}(\alpha''-\alpha')$. So ist z. B., wenn man $f+e+b+d = 2s$ setzt, $\cos\frac{1}{2}(\alpha''-\alpha') = \sqrt{\frac{(s-e)(s-f)(s-b)(s-d)}{efbd}}$.

Zur Berechnung von α'' und α' dient $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''} = \frac{eb}{fd}$ (§. 7, 2)

oder die leicht zu entwickelnden Gleichungen $\sin\alpha'' = \frac{2\,fd\,\sin(\alpha''-\alpha')}{f^2+d^2-e^2-b^2}$, $\sin\alpha' = \frac{2\,eb\,\sin(\alpha''-\alpha')}{f^2+d^2-e^2-b^2}$. 2. Aufl. Verlängert man AD und BC bis zu ihrem Durchschnittspunkte H und setzt HD $=$ x, HC $=$ y, so ist $\cos CHD = \frac{x^2+(b+y)^2-f^2}{2x(b+y)} = \frac{y^2+(d+x)^2-e^2}{2y(d+x)}$. Da beide Nenner einander gleich sind, ergiebt sich $e^2 - 2dx - d^2 = f^2 - 2by - b^2$. Aus dieser Gleichung und der Proportion $x : y = d : b$ findet man $x = \frac{d(f^2-e^2)}{2(b^2-d^2)} - \frac{d}{2}$ und $y = \frac{b(f^2-e^2)}{2(b^2-d^2)} - \frac{b}{2}$. Dadurch lassen sich die Dreiecke CHA und BHD, sodann successive sämmtliche Stücke des Trapezes berechnen.

§. 37.

Aufgaben über das allgemeine Viereck.

a) In den folgenden Aufgaben dienen zur Berechnung von $\triangle$ ABC folgende Stücke:

1. a, α'', β'
2. a, b, β
3. a, e, β'
4. a, b, α''
5. a, e, α''
6. a, e, β
7. a, b, e
8. a + b, α'', β' (§. 14, 1)
9. a − b, α'', β' (§. 14, 2)
10. a + b, e, α'' (§. 14, 70)
11. a − b, e, α'' (§. 14, 71)
12. a + b, e, β (§. 14, 51)
13. a − b, e, β (§. 14, 53)
14. $a^2 - b^2$, α'', β' (§. 14, 12)
15. $a^2 - b^2$, e, β (§. 14, 62).

Außerdem kann gegeben sein:

α) γ'', δ'
β) α, δ'
γ) α, γ
δ) α, δ
ε) c, γ''
ζ) d, δ'
η) c, δ'
ϑ) d, γ''
ι) c, α
κ) c, γ
λ) d, α
μ) c, δ
ν) d, δ
ξ) c, d
ο) c + d, γ'' (§. 14, 70)
π) c − d, γ'' (§. 14, 71)
ϱ) c + d, δ' (§. 14, 70)
σ) c − d, δ' (§. 14, 71)
τ) c + d, α (§. 14, 70)
υ) c − d, α (§. 14, 71)
φ) c + d, γ (§. 14, 70)
χ) c − d, γ (§. 14, 71)
ψ) c + d, δ (§. 14, 51)
ω) c − d, δ (§. 14, 53)
αα) $c^2 - d^2$, δ (§. 14, 62)
ββ) α', γ'
γγ) β'', δ''
δδ) α, α'
εε) α, γ'
ζζ) γ'', δ''
ηη) β'', γ'
ϑϑ) α', δ''
ιι) δ', δ''
κκ) α', γ''
λλ) α, ε
μμ) c, β''
νν) d, α'

$\xi\xi)$ c, γ' $\chi\chi)$ f, α' $\zeta\zeta\zeta)$ F, d $\vartheta\vartheta\vartheta)$ F, δ'
$oo)$ d, δ'' $\psi\psi)$ f, β'' $\eta\eta\eta)$ F, γ''
$\pi\pi)$ c, δ'' $\omega\omega)$ f, γ' $\iota\iota\iota)$ F, δ (§. 14, 65 oder 68)
$\varrho\varrho)$ d, γ' $\alpha\alpha\alpha)$ f, δ'' $\varkappa\varkappa\varkappa)$ F, c + d (§. 14, 450)
$\sigma\sigma)$ c, ε $\beta\beta\beta)$ f, ε $\lambda\lambda\lambda)$ F, c — d (§. 14, 452)
$\tau\tau)$ f, γ'' $\gamma\gamma\gamma)$ c, f $\mu\mu\mu)$ F, ε $ooo)$ F, γ'
$\upsilon\upsilon)$ f, δ' $\delta\delta\delta)$ d, f $\nu\nu\nu)$ F, f $\pi\pi\pi)$ F, δ''.
$\varphi\varphi)$ f, α $\varepsilon\varepsilon\varepsilon)$ F, c

Nach Berechnung von △ ABC ist in den Fällen α) bis $\alpha\alpha$), ferner in $\varepsilon\varepsilon\varepsilon$) bis $\lambda\lambda\lambda$) das Dreieck ACD zu berechnen, in den übrigen Fällen die Dreiecke ABD und CBD. Ist F gegeben, so berechne man den Inhalt von △ ABC und findet durch Subtraction den von ACD. In $\mu\mu\mu$) bis $\pi\pi\pi$) ist zu beachten, daß $2\,F = ef \sin\varepsilon$ [s. unter c)], für die beiden letzten Fälle, daß $\varepsilon = \alpha'' + \gamma'$, $\pi - \varepsilon = \beta' + \delta''$ ist.

Diejenigen Aufgaben, in denen nur die vier Hauptfälle in Anwendung kommen, sind bereits §. 27 angeführt.

b) Die folgenden Aufgaben lassen sich nach dem unter a) angegebenen Verfahren lösen, sind aber nicht unter den aus Combination von 1) bis 15) mit α) bis $\pi\pi\pi$) gebildeten Aufgaben.

1. $a + b, c, e, \gamma', \delta''$ 5. $a + b, e, \alpha', \gamma', \delta''$ 9. $a^2 - b^2, c, e, \gamma', \delta''$
2. $a - b, c, e, \gamma', \delta''$ 6. $a - b, e, \alpha', \gamma', \delta''$ 10. $a^2 - b^2, e, f, \gamma', \delta''$
3. $a + b, e, f, \gamma', \delta''$ 7. $a + b, e, \gamma', \gamma'', \delta''$ 11. $a^2 - b^2, c, \alpha', \gamma', \delta''$
4. $a - b, e, f, \gamma', \delta''$ 8. $a - b, e, \gamma', \gamma'', \delta''$ 12. $a^2 - b^2, e, \gamma', \gamma'', \delta''$

c) Zieht man durch die Ecken Parallelen zu den Diagonalen, so ist der Inhalt des von den Parallelen eingeschlossenen Parallelogramms gleich $2\,F$. Daher ist $2\,F = ef \sin\varepsilon$, also $e = \frac{2\,F}{f \sin\varepsilon}$. Ist F, $f \pm e$ und ε gegeben, so findet man fe und dann f und e nach §. 10. Die folgenden Aufgaben sind hierdurch auf solche unter a) zurückgeführt.

13. $F, f, \alpha'', \beta', \varepsilon$ 23. $F, f + e, \alpha'', \beta', \varepsilon$ 33. $F, a + b, f + e, \alpha'', \gamma'$
14. $F, a, f, \beta', \delta''$ 24. $F, f - e, \alpha'', \beta', \varepsilon$ 34. $F, a + b, f - e, \alpha'', \gamma'$
15. $F, a, f, \alpha'', \gamma'$ 25. $F, f + e, a, \beta', \delta''$ 35. $F, a - b, f + e, \alpha'', \gamma'$
16. $F, a, f, \beta, \varepsilon$ 26. $F, f - e, a, \beta', \delta''$ 36. $F, a - b, f - e, \alpha'', \gamma'$
17. F, a, b, f, ε 27. $F, f + e, a, \alpha'', \gamma'$ 37. $F, a + b, f + e, \beta, \varepsilon$
18. $F, a + b, f, \alpha'', \gamma'$ 28. $F, f - e, a, \alpha'', \gamma'$ 38. $F, a + b, f - e, \beta, \varepsilon$
19. $F, a - b, f, \alpha'', \gamma'$ 29. $F, f + e, a, \beta, \varepsilon$ 39. $F, a - b, f + e, \beta, \varepsilon$
20. $F, a + b, f, \beta, \varepsilon$ 30. $F, f - e, a, \beta, \varepsilon$ 40. $F, a - b, f - e, \beta, \varepsilon$
21. $F, a - b, f, \beta, \varepsilon$ 31. $F, f + e, a, b, \varepsilon$ 41. $F, a^2 - b^2, f + e, \beta, \varepsilon$
22. $F, a^2 - b^2, f, \beta, \varepsilon$ 32. $F, f - e, a, b, \varepsilon$ 42. $F, a^2 - b^2, f - e, \beta, \varepsilon$.

d) Man kann kein Dreieck direct berechnen. Unter den gegebenen Stücken befinden sich nur die Seiten und Winkel des Vierecks oder auch

Aggregate derselben. Man fälle auf AB die Senkrechten CF und DG. Wir unterscheiden nun drei Fälle.

1. α und β sind spitze Winkel, so daß F und G beide auf AB liegen. Dann ist $a = AG + GF + FB$ und $AG = d \cos\alpha$, $FB = b \cos\beta$, $GF = - c \cos(\beta + \gamma)$, folglich $a = b \cos\beta + d \cos\alpha - c \cos(\beta + \gamma)$ (I).

2. α und β sind beide stumpf, so daß F und G außerhalb AB fallen. Dann ist $a = GF - AG - FB$, und $GF = - c \cos(\beta + \gamma)$, $AG = d \cos(\pi - \alpha) = - d \cos\alpha$, ebenso $FB = - b \cos\beta$, folglich $a = b \cos\beta + d \cos\alpha - c \cos(\beta + \gamma)$.

3. α ist stumpf und β spitz. Dann fällt F innerhalb, G außerhalb AB und es ist $a = GF + FB - GA$ und $GF = - c \cos(\beta + \gamma)$, $GA = - d \cos\alpha$, $FB = b \cos\beta$, folglich auch für diesen Fall und somit ganz allgemeingültig $a = b \cos\beta + d \cos\alpha - c \cos(\beta + \gamma)$ (I). Zieht man durch D eine Parallele zu AB, welche CF in H trifft und unterscheidet die beiden Fälle, ob H auf CF selbst oder auf der Verlängerung von CF liegt, so leitet man in ähnlicher Weise wie vorher die allgemeingültige Gleichung $b \sin\beta - d \sin\alpha - c \sin(\beta + \gamma) = 0$ (II) ab. Diese beiden Gleichungen (I) und (II) enthalten die sieben Stücke a, b, c, d, α, β, γ. Sind also fünf dieser Stücke gegeben, so hat man zur Berechnung der beiden anderen zwei Gleichungen. Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn sich unter den gegebenen Stücken Aggregate von Seiten oder von Winkeln befinden. Durch Elimination von c aus (I) und (II) erhält man $a \sin(\beta + \gamma) = b \sin\gamma - d \sin\delta$ (III). Durch Addition und Subtraction von (II) und (III) ergiebt sich noch $(a + c) \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = b \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) - d \cos \frac{1}{2}(\delta - \alpha)$ (IV) und $(a - c) \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = b \sin \frac{1}{2}(\gamma - \beta) + d \sin \frac{1}{2}(\delta - \alpha)$ (V). Sind von den Stücken a, b, c, d, α, β, γ, δ fünf Stücke gegeben, unter denen sich natürlich nicht sämmtliche vier Winkel befinden dürfen, so dienen zur Berechnung der drei fehlenden Stücke zwei beliebige der Gleichungen (I) bis (V) mit Zuhülfenahme der Gleichung $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$. Befindet sich unter den gegebenen Stücken ein Aggregat zweier Seiten, so hat man allerdings vier unbekannte Größen, dafür aber auch eine vierte Gleichung, z. B. wenn $a + b$ gegeben ist, $a + b = s$. Sind zwei Aggregate gegeben, so hat man 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten.

Anmerkung: Man könnte auch anstatt, wie es hier geschehen ist, die Seiten auf a zu projiciren, dieselben auf eine der anderen Seiten projiciren. Die dadurch erhaltenen Gleichungen würden sich aber nur durch die Form von (I) und (II) unterscheiden und sich leicht auf dieselben zurückführen lassen.

43. b, c, d, α, β. Aufl. $\sin(\beta+\gamma) = \frac{b \sin\beta - d \sin\alpha}{c}$.

44. a, c, α, β, γ. Aufl. $b = \frac{a \sin\alpha - c \sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $d = \frac{a \sin\beta - c \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$.

45. b, c, d, $\alpha + \beta = \sigma$, $\beta + \gamma = \sigma'$. Aufl. Es ist $b \sin\beta - d \sin\alpha = c \sin\sigma'$ und $\alpha + \beta = \sigma$ (§. 3, 3).

46. a, b, c, d, $\gamma + \alpha = \sigma$. Aufl. Es ist $a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$, daher $2bc\cos\gamma - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 - d^2$ (§. 3, 5).

47. a, b, c, d, $\gamma - \alpha = \sigma$ (45).

48. $a + c = s$, b, α, β, γ. Aufl. $d = \frac{b\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - s\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\delta-\alpha)}$.

49. $a - c$, b, α, β, γ (48).

50. $a + b = s$, c, α, β, γ. Aufl. $d = \frac{s\sin\frac{1}{2}\beta - c\sin(\frac{1}{2}\beta+\gamma)}{\sin(\frac{1}{2}\beta+\alpha)}$.

51. $a - b$, c, α, β, γ (50).

52. $a + b = s$, c, d, α, β. Aufl. $\sin(\frac{1}{2}\beta+\gamma) = \frac{s\sin\frac{1}{2}\beta - d\sin(\frac{1}{2}\beta+\alpha)}{c}$.

53. $a - b$, c, d, α, β (52).

54. $a + b = s$, c, d, α, γ. Aufl. $\cot\frac{1}{2}\beta = \frac{s - d\cos\alpha - c\cos\gamma}{c\sin\gamma + d\sin\alpha}$.

55. $a - b$, c, d, α, γ (54).

56. $a + c = s$, b, d, α, β. Aufl. $\cot\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{s - b\cos\beta - d\cos\alpha}{b\sin\beta - d\sin\alpha}$.

57. $a - c$, b, d, α, β (56).

58. $a + c = s$, $b + d = s'$, α, β, γ. Aufl. $b = \frac{s\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) + s'\cos\frac{1}{2}(\delta-\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}(\delta+\beta)\sin\frac{1}{2}(\delta+\gamma)}$,
$d = \frac{s'\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - s\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{2\sin\frac{1}{2}(\delta+\beta)\sin\frac{1}{2}(\delta+\gamma)}$.

59. $a - c$, $b - d$, α, β, γ (58). 60. $a + c$, $b - d$, α, β, γ (58).

61. $b + c + d = s$, a, α, β, γ. Aufl. $b = \frac{s\sin\frac{1}{2}\delta - a\sin(\alpha+\frac{1}{2}\delta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\gamma}$,
$d = \frac{s\sin\frac{1}{2}\gamma - a\sin(\beta+\frac{1}{2}\gamma)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\delta}$.

62. $a + b = s$, $c + d = s'$, α, β, γ. 1. Aufl. $b = \frac{s'\sin\frac{1}{2}\delta - s\sin(\alpha+\frac{1}{2}\delta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\beta}$,
$d = \frac{s'\sin(\frac{1}{2}\beta+\gamma) - s\sin\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\delta}$. 2. Aufl. Es ist $\frac{a+b}{e}$
$= \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha''-\beta')}{\sin\frac{1}{2}\beta}$ und $\frac{c+d}{e} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma''-\delta')}{\sin\frac{1}{2}\delta}$, folglich, wenn

man Beides dividirt, $\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha'' - \beta')}{\cos \frac{1}{2}(\gamma'' - \delta')} = \frac{s \sin \frac{1}{2}\beta}{s' \sin \frac{1}{2}\delta}$ und $\frac{1}{2}(\alpha'' - \beta') - \frac{1}{2}(\gamma'' - \delta') = \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ (§. 7, 6).

63. $a + b, c - d, \alpha, \beta, \gamma$ (62). 64. $a - b, c - d, \alpha, \beta, \gamma$ (62).

e) a, c, e, f bilden ein Viereck ABDC, in welchem sich zwei gegenüberliegende Seiten AC und BD schneiden. Wendet man auf dasselbe ein ähnliches Verfahren an, wie in d) auf das Viereck ABCD, indem man a, c und f auf e projicirt, so erhält man hier ebenso wie dort zwei Gleichungen, nämlich $a \cos \beta' + c \cos \delta' + f \cos \varepsilon = e$ (I), $a \sin \beta' + c \sin \delta' = f \sin \varepsilon$ (II), aus denen man noch durch Elimination von f die Gleichung $a \sin \delta'' + c \sin \beta'' = e \sin \varepsilon$ (III) erhält. Durch Addition und Subtraction von (II) und (III) ergiebt sich noch $(f + e) \sin \frac{1}{2}\varepsilon = a \cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta'') + c \cos \frac{1}{2}(\beta'' - \delta')$ (IV), $(f - e) \cos \frac{1}{2}\varepsilon = a \sin \frac{1}{2}(\beta' - \delta'') - c \sin \frac{1}{2}(\beta'' - \delta')$ (V). Bei einigen Aufgaben ist zu beachten, daß $\beta + \gamma = \pi - (\beta' + \delta')$ ist.

65. a, c, f, β', δ'. Aufl. $\sin \varepsilon = \frac{a \sin \beta' + c \sin \delta'}{f}$.

66. $a, e, f, \delta', \beta''$. Aufl. $\sin(\beta' - \delta') = \frac{f \sin \beta'' - e \sin \delta'}{a}$.

67. $a, c, \beta', \beta'', \delta'$. Aufl. $f = \frac{a \sin \beta' + c \sin \delta'}{\sin \varepsilon}$, $e = \frac{a \sin \delta'' + c \sin \beta''}{\sin \varepsilon}$.

68. $e, f, \beta', \beta'', \delta'$. Aufl. $a = \frac{f \sin \beta'' - e \sin \delta'}{\sin(\beta' - \delta')}$, $c = \frac{e \sin \beta' - f \sin \delta''}{\sin(\beta' - \delta')}$.

69. $a, c, f, \varepsilon, \beta + \gamma = \sigma$. Aufl. aus (II) mit Hülfe von $\beta' - \delta' = \pi - \sigma$ (§. 3, 4).

70. $a, e, f, \varepsilon, \beta + \gamma = \sigma$. Aufl. $f \sin \beta'' - e \sin \delta' = a \sin \sigma$ (§. 3, 3).

71. $a + c = s, e, \beta', \beta'', \delta'$. Aufl. $f = \frac{s \cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta') - e \cos \frac{1}{2}(\beta' + \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\beta'' + \delta'')}$.

72. $a - c, e, \beta', \beta'', \delta'$ (71).

73. $f + e = s, a, \beta', \beta'', \delta'$. Aufl. $c = \frac{s \sin \frac{1}{2}\varepsilon - a \cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta'')}{\cos \frac{1}{2}(\beta' + \delta'')}$.

74. $f - e, a, \beta', \beta'', \delta'$ (73).

75. $a + c = s, e, f, \beta', \delta''$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta' - \delta') = \frac{s - e \cos \beta' - f \cos \delta''}{e \sin \beta' - f \sin \delta''}$.

76. $a - c, e, f, \beta', \delta''$ (75).

77. $a + c = s, e, f, \beta', \delta'$. Aufl. $\cos \frac{1}{2}(\beta'' + \delta'') = \frac{s \cos \frac{1}{2}(\beta' - \delta') - e \cos \frac{1}{2}(\beta' + \delta')}{f}$.

78. $a - c, e, f, \beta', \delta'$ (77).

79. $a + c = s, e, f, \beta', \beta''$. Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta' - \delta') = \frac{s - e \cos \beta' - f \cos \beta''}{e \sin \beta' + f \sin \beta''}$.

80. a — c, e, f, β', β'' (79).

81. f + e = s, a, c, β', δ''. Aufl. $\cos {}^1\!/_2 (\beta'' - \delta') = \frac{s \sin {}^1\!/_2 \varepsilon - a \cos {}^1\!/_2 (\beta' - \delta'')}{c}$.

82. f — e, a, c, β', δ'' (81).

83. f + e = s, a, c, β', δ'. Aufl. $\cot {}^1\!/_2 \varepsilon = \frac{s - a \cos\beta' - c \cos\delta'}{a \sin\beta' + c \sin\delta'}$.

84. f — e, a, c, β', δ' (83).

85. f + e = s, a, c, β' β''. Aufl. $\cot {}^1\!/_2 \varepsilon = \frac{s - a \cos\beta' - c \cos\beta''}{a \sin\beta' + c \sin\beta''}$.

86. f — e, a, c, β', β'' (85).

87. a + c = s, f + e = s', β', β'', δ'. Aufl.

$$a = \frac{s' \sin {}^1\!/_2 \varepsilon - s \cos {}^1\!/_2 (\beta'' - \delta')}{2 \sin {}^1\!/_2 (\beta' - \delta') \sin {}^1\!/_2 (\beta'' - \beta')}, \quad c = \frac{s \cos {}^1\!/_2 (\beta' - \delta'') - s' \sin {}^1\!/_2 \varepsilon}{2 \sin {}^1\!/_2 (\beta' - \delta') \sin {}^1\!/_2 (\beta'' - \beta')},$$

$$e = \frac{s \cos {}^1\!/_2 (\beta' - \delta') - s' \cos {}^1\!/_2 (\beta'' + \delta'')}{2 \cos {}^1\!/_2 \varepsilon \sin {}^1\!/_2 (\beta'' - \beta')},$$

$$f = \frac{s' \cos {}^1\!/_2 (\beta' + \delta') - s \cos {}^1\!/_2 (\beta' - \delta')}{2 \cos {}^1\!/_2 \varepsilon \sin {}^1\!/_2 (\beta'' - \beta')}.$$

88. a — c, f + e, β', β'', δ' (87). 89. a + c, f — e, β', β'', δ' (87).

90. a — c, f — e, β', β'', δ' (87).

f) Die folgenden Aufgaben sind mit Hülfe der in c) entwickelten Gleichung $2F = ef \sin\varepsilon$ auf entsprechende unter e) zurückzuführen.

91. F, a, e, f, δ'
92. F, a, e, δ', β''
93. F, a, f + e, δ', β''
94. F, a, f — e, δ', β''
95. F, e, f, β', β''
96. F, e, f, β', δ'
97. F, e, β', β'', δ'
98. F, f + e, β', β'', δ'
99. F, f — e, β', β'', δ'
100. F, a, e, f, $\beta + \gamma$
101. F, a, e, ε, $\beta + \gamma$
102. F, a, f + e, ε, $\beta + \gamma$
103. F, a, f — e, ε, $\beta + \gamma$
104. F, a + c, e, f, β'
105. F, a — c, e, f, β'
106. F, a + c, e, β', δ''
107. F, a — e, e, β', δ''
108. F, a + c, f + e, β', δ''
109. F, a + c, f — e, β', δ''
110. F, a — c, f + e, β', δ''
111. F, a — c, f — e, β', δ''

g) Folgende Aufgaben mögen hier Platz finden, weil einige der unter h) verzeichneten auf dieselben zurückzuführen sind.

112. a + c = s, α'', β', γ'', δ'. Aufl. $a = \frac{e \sin\alpha''}{\sin\beta}$, $c = \frac{e \sin\gamma''}{\sin\delta}$,

daher $e = \frac{s \sin\beta \sin\delta}{\sin\alpha'' \sin\delta + \sin\gamma'' \sin\beta}$.

113. a — c, α'', β', γ'', δ'. Aufl. ähnlich wie 112.

114. f + e = s, α, β, α', α''. Aufl. $f = \frac{a \sin\alpha}{\sin\alpha'}$, $e = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha''}$,

daher $a = \frac{s \sin\alpha' \sin\alpha''}{\sin\alpha \sin\alpha'' + \sin\beta \sin\alpha'}$.

115. f — e = s, α, β, α', α''. Aufl. ähnlich wie 114.

116. $a + b + c + d = s, \alpha'', \beta', \gamma'', \delta'$. Aufl. $a = \frac{e \sin\alpha''}{\sin\beta}$, $b = \frac{e \sin\beta'}{\sin\beta}$, $c = \frac{e \sin\gamma''}{\sin\delta}$, $d = \frac{e \sin\delta'}{\sin\delta}$, folglich $s = e\left(\frac{\cos{}^1\!/_2(\alpha'' - \beta')}{\cos{}^1\!/_2(\alpha'' + \beta')} + \frac{\cos{}^1\!/_2(\gamma'' - \delta')}{\cos{}^1\!/_2(\gamma'' + \delta')}\right)$, wodurch e zu finden ist.

117. $b + c + d, \alpha'', \beta', \gamma'', \delta'$. Aufl. ähnlich wie 116.

118. $F, \alpha'', \beta', \gamma'', \delta'$. Aufl. Es ist $2F = ab \sin\beta + cd \sin\delta$, folglich, wenn man $a = \frac{e \sin\alpha''}{\sin\beta}$, $b = \frac{e \sin\beta'}{\sin\beta}$, $c = \frac{e \sin\gamma''}{\sin\delta}$, $d = \frac{e \sin\delta'}{\sin\delta}$ einsetzt, $2F = e^2\left(\frac{\sin\alpha'' \sin\beta'}{\sin\beta} + \frac{\sin\gamma'' \sin\delta'}{\sin\delta}\right)$, wodurch e zu finden ist.

119. $F, \alpha, \beta, \alpha', \alpha''$. Aufl. Man findet leicht $\beta', \delta'', \gamma', \gamma'', \varepsilon$. Nun ist $2F = ef \sin\varepsilon$ und $e = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha''}$, $f = \frac{a \sin\alpha}{\sin\alpha'}$. Indem man dies einsetzt, erhält man $a = \sqrt{\frac{2F \sin\alpha' \sin\alpha''}{\sin\alpha \sin\beta \sin\varepsilon}}$.

h) Die Gestalt des Vierecks ist durch vier von den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \gamma', \gamma'', \delta', \delta''$ bestimmt. Natürlich dürfen diese vier Winkel nicht von einander abhängig sein, wie etwa $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, oder $\beta', \beta'', \delta', \delta''$. Befinden sich also unter den gegebenen Stücken vier unabhängige solcher Winkel, so müssen sich demnach sämmtliche anderen berechnen lassen, und die Aufgabe ist dadurch auf eine einfache Vierecksaufgabe oder auf solche unter a) und g) zurückgeführt. Einige Fälle, in denen diese Berechnung einfach ausfällt, mögen hier angeführt und dazu folgende Beziehungen zwischen den Winkeln entwickelt werden. Durch Multiplication von $\frac{f}{a} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$, $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$, $\frac{b}{f} = \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma}$ erhält man $\sin\alpha \sin\alpha'' \sin\beta'' = \sin\gamma \sin\alpha' \sin\beta'$ (I). Behandelt man ebenso die Verhältnisse $\frac{f}{d}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{c}{f}$, ferner $\frac{e}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{e}$, endlich $\frac{e}{d}$, $\frac{d}{a}$, $\frac{a}{e}$, so erhält man die Gleichungen $\sin\alpha \sin\delta' \sin\gamma' = \sin\gamma \sin\delta'' \sin\gamma''$ (II), $\sin\beta \sin\beta'' \sin\gamma'' = \sin\delta \sin\beta' \sin\gamma'$ (III), $\sin\beta \sin\alpha' \sin\delta' = \sin\delta \sin\alpha'' \sin\delta''$ (IV). Durch Division von (I) und (II) ergiebt sich $\sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma' \sin\delta' = \sin\alpha'' \sin\beta'' \sin\gamma'' \sin\delta''$ (V), durch Multiplication von (II) und (III) $\sin\alpha \sin\beta \sin\delta' \sin\beta'' = \sin\gamma \sin\delta \sin\delta'' \sin\beta'$ (VI), durch Division von (I) und (IV) $\sin\alpha \sin\delta \sin\gamma' \sin\alpha'' = \sin\beta \sin\gamma \sin\gamma'' \sin\alpha'$ (VII).

1. Gegeben sei α'', β', γ'', δ'. Aufl. Man findet leicht α, β, γ, δ. Dann hat man nach (I) $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta''} = \frac{\sin\alpha \sin\alpha''}{\sin\gamma \sin\beta'}$ und $\alpha' + \beta'' = \delta = \pi - \gamma'' - \delta'$, oder nach (II) $\frac{\sin\gamma'}{\sin\delta''} = \frac{\sin\gamma \sin\gamma''}{\sin\alpha \sin\delta'}$ und $\gamma' + \delta'' = \beta = \pi - \alpha'' - \beta'$ (§. 7, 1). Außer α'', β', γ'', δ' ist gegeben:

120. a + d	122. f	124. f − e (115)
121. a — d	123. f + e (114)	125. F.

2. Gegeben sei α', α'', β', β''. Aufl. Man findet leicht β und δ. Dann hat man nach (I) $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha' \sin\beta'}{\sin\alpha'' \sin\beta''}$ und $\alpha + \gamma = 2\pi - \beta - \delta$, oder nach (III) $\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma''} = \frac{\sin\beta \sin\beta''}{\sin\delta \sin\beta'}$ und $\gamma' - \gamma'' = \alpha' - \alpha''$, oder nach (IV) $\frac{\sin\delta'}{\sin\delta''} = \frac{\sin\delta \sin\alpha''}{\sin\beta \sin\alpha'}$ und $\delta' - \delta'' = \beta' - \beta''$ (§. 7, 1, 2). Außer α', α'', β', β'' ist gegeben:

126. a	132. c + d	138. f + e (114)
127. c	133. c — d	139. f − e (115)
128. e	134. a + d	140. F (119)
129. f	135. a − d	141. b + c + d (116)
130. a + b	136. a + c (112)	142. a + b + c + d (116).
131. a — b	137. a — c (113)	

3. Gegeben sei γ', δ'', δ, ε. Aufl. Man findet leicht β, α'', β'. Dann hat man nach (III) $\sin\beta'' \sin\gamma'' = \frac{\sin\delta \sin\beta' \sin\gamma'}{\sin\beta}$ und $\beta'' - \gamma'' = \delta - \varepsilon$, oder nach (IV) $\sin\alpha' \sin\delta' = \frac{\sin\delta \sin\alpha'' \sin\delta''}{\sin\beta}$ und $\alpha' - \delta' = \varepsilon + \delta - \pi$ (§. 6, 2). Außer γ', δ'', δ, ε ist gegeben:

143. a	149. a + d	155. f + e (114)
144. c	150. a — d	156. f — e (115)
145. e	151. c + d	157. F (119)
146. f	152. c — d	158. b + c + d (117)
147. a + b	153. a + c (112)	159. a + b + c + d (116).
148. a — b	154. a — c (113)	

4. Gegeben sei α'', β', α', γ''. Aufl. Man findet leicht α, ε, β, γ', δ''. Dann hat man nach (VII) $\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{\sin\alpha \sin\gamma' \sin\alpha''}{\sin\beta \sin\gamma'' \sin\alpha'}$ und $\gamma + \delta = 2\pi - \alpha - \beta$, oder nach (V) $\frac{\sin\beta''}{\sin\delta'} = \frac{\sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma'}{\sin\alpha'' \sin\gamma'' \sin\delta''}$ und $\beta'' + \delta' = \pi - \varepsilon$ (§. 7, 1). Außer α'', β', α', γ'' ist gegeben:

160. c + d 161. c — d 162. b + c 163. b — c

164. a + c (112) 166. b + d (112) 168. b + c + d (117)
165. a — c (113) 167. b — d (113) 169. a + b + c + d (116).

5. Gegeben sei α'', β', β'', γ''. Aufl. Man findet leicht α und β. Dann hat man nach (I) $\sin\gamma \sin\alpha' = \frac{\sin\alpha \sin\alpha'' \sin\beta''}{\sin\beta'}$ und $\gamma + \alpha' = \pi + \alpha'' - \beta'' - \gamma''$, oder nach (III) $\sin\delta \sin\gamma' = \frac{\sin\beta \sin\beta'' \sin\gamma''}{\sin\beta'}$ und $\delta - \gamma' = \alpha'' + \beta'' - \gamma''$ (§. 6, 1, 2). Außer α'', β', β'', γ'' ist gegeben:

170. a	177. a — b	183. b — d (113)
171. b	178. c + d	184. f + e (114)
172. c	179. c — d	185. f — e (115)
173. d	180. a + c (112)	186. F (119)
174. e	181. a — c (113)	187. b + c + d (117)
175. f	182. b + d (112)	188. a + b + c + d (116).
176. a + b		

6. Gegeben sei α, β, γ, ε. 1. Aufl. Nach (I) ist $\frac{\sin\alpha'' \sin\beta''}{\sin\alpha' \sin\beta'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Löst man links die Producte in Differenzen von Cosinussen auf und beachtet, daß $\alpha'' - \beta'' = \varepsilon + \gamma - \pi$, $\alpha' - \beta' = \varepsilon - \alpha$ ist, so erhält man $-\sin\alpha\,(\cos(\varepsilon+\gamma) + \cos(\alpha''+\beta'')) = \sin\gamma\,(\cos(\varepsilon-\alpha) - \cos(\alpha' + \beta'))$, folglich $\sin\gamma \cos(\alpha' + \beta') - \sin\alpha \cos(\alpha'' + \beta'') = \sin\gamma \cos(\varepsilon - \alpha) + \sin\alpha \cos(\varepsilon + \gamma) = \cos\varepsilon \sin(\gamma + \alpha) + \sin\varepsilon \sin(\gamma - \alpha)$, oder, wenn man einen Hülfswinkel φ durch die Gleichung $\frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\sin(\gamma - \alpha)} = \operatorname{tg}\varphi$ einführt, $\sin\gamma \cos(\alpha' + \beta') - \sin\alpha \cos(\alpha'' + \beta'') = \frac{\sin(\gamma - \alpha) \sin(\varphi + \varepsilon)}{\cos\varphi}$ und $\alpha' + \beta' + \alpha'' + \beta'' = \pi - \beta + \delta$, so daß man $\alpha' + \beta'$ und $\alpha'' + \beta''$ nach §. 3, 5 berechnen kann. Da nun $\alpha' - \beta'$ und $\alpha'' - \beta''$ bekannt sind, findet man auch α', β', α'', β'' und somit auch die anderen Winkel. Anstatt der Gleichung (I) hätte man auch in ganz ähnlicher Weise (II), (III) oder (IV) benutzen können. 2. Aufl. Die Gleichung (VII) geht, wenn man den Hülfswinkel x durch die Gleichung $\frac{\sin\gamma \sin\beta}{\sin\alpha \sin\delta} = \operatorname{tg} x$ einführt, über in $\frac{\sin\gamma' \sin\alpha''}{\sin\alpha' \sin\gamma''} = \operatorname{tg} x$. Verwandelt man links die Sinusproducte in Cosinusdifferenzen, so erhält man $\cos(\alpha'' - \gamma') - \cos\varepsilon = \operatorname{tg} x\,(\cos(\alpha' - \gamma'') - \cos\varepsilon)$, oder $\cos(\alpha'' - \gamma') - \operatorname{tg} x \cos(\alpha' - \gamma'') = \frac{\sqrt{2}\,\sin(\frac{1}{4}\pi - x)\cos\varepsilon}{\cos x}$. Da $\alpha'' - \gamma' + \alpha' - \gamma'' = 2\pi - 2(\alpha + \beta)$ ist, findet man nach

§. 3, 5 $\alpha'' - \gamma'$ und $\alpha' - \gamma''$, mithin auch $\alpha', \gamma'', \alpha'', \gamma'$, da man $\alpha'' + \gamma'$ und $\alpha' + \gamma''$ kennt. Außer α, β, γ und ε ist gegeben:

189. a	193. a + c (112)	197. F (119)
190. e	194. a — c (113)	198. b + c + d (117)
191. a + b	195. f + e (114)	199. a + b + c + d (116).
192. a — b	196. f — e (115)	

7. $\beta', \delta', \beta'', \alpha + \beta = \sigma$. 1. Aufl. Man findet leicht δ''. Nach (I) ist $\frac{\sin\alpha \sin\alpha''}{\sin\gamma \sin\alpha'} = \frac{\sin\beta'}{\sin\beta''}$, und man kann auf diese Gleichung ein ähnliches Verfahren anwenden, wie in 6), 1. Aufl. Zu beachten ist dabei, daß man $\alpha - \alpha''$ und $\gamma + \alpha'$ kennt. Man findet schließlich mit Hülfe von §. 3, 6 $\alpha + \alpha''$ und $\gamma - \alpha'$, somit auch $\alpha, \alpha'', \gamma, \alpha'$ selbst. Auch die Gleichungen (II), (III), (IV) lassen sich zur Auflösung benutzen. 2. Aufl. Aehnlich wie in 6), 2. Aufl., findet man $\alpha - \beta$ und $\delta - \gamma$, mithin auch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ selbst aus (VI). Außer $\beta', \beta'', \delta', \alpha + \beta$ ist gegeben:

200. a	204. a — b	208. f — e (115)
201. b	205. a + c (112)	209. F (119)
202. e	206. a — c (113)	210. b + c + d (117)
203. a + b	207. f + e (114)	211. a + b + c + d (116).

i) Die folgenden Aufgaben werden gebildet, indem man die unter a) 1 bis 15 angeführten Stücke combinirt mit

α) α', β''	γ) δ, γ'	ε) β'', γ''	η) α, β''
β) δ, ε	δ) δ, δ''	ζ) α', δ'	ϑ) γ, α'.

Nach Berechnung von α'' und β' sind die Aufgaben in dem Falle α) auf h, 2), in den Fällen β), γ), δ) auf h, 3), in ε) bis ϑ) auf h, 4) zurückgeführt. Als besonderes Beispiel diene

212. a, b, β, α', β'' (Pothenotsche Aufgabe) (§. 42, 11). Will man α'' und β' nicht berechnen, so kann man auch der ersten Gleichung in h, 7) die Form $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{b \sin\alpha'}{a \sin\beta''}$ geben. Aehnliches ist auch auf einzelne der anderen Aufgaben anwendbar.

k) Die folgenden Aufgaben lassen sich nach dem unter i) angegebenen Verfahren lösen, finden sich aber nicht unter den durch Combination dort gebildeten Aufgaben.

213. a, b, $\delta, \gamma', \delta''$ (h, 3)	216. a — b, e, $\delta, \gamma', \delta''$ (h, 3)
214. a, e, $\delta, \gamma', \delta''$ (h, 3)	217. $a^2 - b^2$, e, $\delta, \gamma', \delta''$ (h, 3).
215. a + b, e, $\delta, \gamma', \delta''$ (h, 3)	

l) Folgende Aufgaben werden gebildet, indem man die unter a) 1 bis 15 angeführten Stücke combinirt mit

α) f, δ. Aufl. Nach Berechnung von $\triangle$ ABC ist $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{a}{f}$,

$\frac{\sin\beta''}{\sin\gamma} = \frac{b}{f}$, ferner $\alpha' + \beta''$ und $\alpha + \gamma$ bekannt, daher $\alpha', \beta'', \alpha, \gamma$ nach §. 9, 9 zu berechnen.

β) c, α'. Aufl. Nach Berechnung von $\triangle$ ABC ist $\frac{\sin\gamma'}{\sin\beta''} = \frac{c}{b}$, $\frac{\sin\gamma''}{\sin\delta} = \frac{c}{f}$, ferner $\gamma'' - \gamma'$ und $\delta - \beta''$ bekannt, daher $\gamma', \gamma'', \beta'', \delta$ nach §. 9, 10 zu berechnen.

γ) d, β''. Aufl. wie β).

m) Besondere Aufgaben.

218. a, c, α', γ', $\beta + \gamma = \sigma$. Aufl. Durch Multiplication von $\frac{a}{f} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}$ und $\frac{f}{c} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}$ erhält man $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\gamma'}{c \sin\alpha'}$, ferner ist $\gamma - \alpha = \sigma + \alpha' - \gamma' - \pi$ (§. 7, 2).

219. a, c, β', γ', δ'. Aufl. Durch Multiplication von $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}$ und $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'}$ erhält man $\sin\alpha'' \sin\beta'' = \frac{a \sin\beta' \sin\gamma'}{c}$, ferner ist $\alpha'' + \beta'' = \pi - \gamma' - \delta'$ (§. 6, 1).

220. a, c, α, δ, γ'. Aufl. wie 218. Es ist $\sin\alpha' \sin\gamma = \frac{a \sin\gamma' \sin\alpha}{c}$ und $\gamma - \alpha' = \pi - \gamma' - \delta$ (§. 6, 2)

221. a, c, ε, α', γ'. Aufl. Aus der in 219 entwickelten Gleichung erhält man $\frac{\sin\beta''}{\sin\beta'} = \frac{a \sin\gamma'}{c \sin\alpha''}$ und auf ähnliche Weise, indem man die Verhältnisse $\frac{a}{d}$ und $\frac{d}{c}$ mit einander multiplicirt, erhält man $\frac{\sin\delta'}{\sin\delta''} = \frac{a \sin\gamma''}{c \sin\alpha'}$. Da ferner $\beta'' + \delta' = \pi - \varepsilon$ und $\beta' + \delta'' = \pi - \varepsilon$ ist, erhält man $\beta'', \beta', \delta', \delta''$ nach §. 9, 5.

222. e, f, α, β, ε. Aufl. Durch Multiplication von $\frac{e}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha''}$ und $\frac{a}{f} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}$ erhält man $\frac{e}{f} = \frac{\sin\beta \sin\alpha'}{\sin\alpha \sin\alpha''}$, folglich ist $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''} = \frac{e \sin\alpha}{f \sin\beta}$, ferner $\alpha' + \alpha'' = \pi + \varepsilon - \alpha - \beta$ (§. 7, 1).

223. e, f, α, α'', γ. Aufl. Wie in 222 erhält man $\sin\beta \sin\alpha' = \frac{e \sin\alpha \sin\alpha''}{f}$, ferner $\beta + \alpha' = \pi + \varepsilon - \alpha - \alpha''$ (§. 6, 1).

224. e, f, α, β, γ. Aufl. Wie in 222 erhält man $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''} = \frac{e \sin\alpha}{f \sin\beta}$

und auf ähnliche Weise $\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma''} = \frac{e \sin\gamma}{f \sin\delta}$. Ferner ist $\alpha' - \gamma' = \pi - \alpha - \beta$ und $\alpha'' - \gamma'' = \pi - \alpha - \beta$; daher $\alpha', \gamma', \alpha'', \gamma''$ nach §. 9, 6 zu berechnen.

225. F, e, f, α, β. Aufl. ε zu finden, dann (222).

226. F, e, α, β, ε. Aufl. f zu finden, dann (225).

227. F, f + e, α, β, ε. Aufl. ef, mithin e und f nach §. 10 zu finden, dann (225).

228. F, f — e, α, β, ε (227)

229. F, e, f, α, α'' (225, 223)

230. F, e, α, α'', γ' (226, 223)

231. F, f + e, α, α'', γ' (227, 223)

232. F, f — e, α, α'', γ' (227, 223).

233. a, b, α', β'', γ''. Aufl. Aus $\frac{a}{f} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}$ und $\frac{f}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta''}$ erhält man durch Multiplication $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\beta''}{b \sin\alpha'}$. Ferner ist $\frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'} = \frac{a}{b}$ und $\gamma - \alpha'' = \delta' = \pi - \alpha' - \beta'' - \gamma''$, $\alpha - \beta' = \gamma''$, daher γ, α'', α, β' nach §. 9, 10 zu berechnen.

234. a, f, δ, α'', γ''. Aufl. Aehnlich wie in 233 erhält man die Gleichungen $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{a}{f}$, $\frac{\sin\beta''}{\sin\beta'} = \frac{a \sin\gamma}{f \sin\alpha''}$, $\alpha' + \beta'' = \delta$, $\alpha - \beta' = \gamma''$ (§. 9, 11).

235. a, b, c, d, F. Aufl. Es ist $f^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\gamma$, folglich $bc\cos\gamma - ad\cos\alpha = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)$ (I), ferner $bc\sin\gamma + ad\sin\alpha = 2F$ (II). Setzt man nun $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2 - d^2) = R\cos\varphi$ und $2F = R\sin\varphi$, so findet man φ und R durch die Gleichungen $tg\,\varphi = \frac{4F}{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}$ (III) und $R = \frac{2F}{\sin\varphi}$ (IV), und die Gleichungen (I) und (II) gehen über in $bc\cos\gamma - ad\cos\alpha = R\cos\varphi$ (V), $bc\sin\gamma + ad\sin\alpha = R\sin\varphi$ (VI). Quadrirt und addirt man beide Gleichungen, so ergiebt sich $\cos(\gamma + \alpha) = \frac{b^2c^2 + a^2d^2 - R^2}{2\,abcd}$ (VII). Multiplicirt man (V) mit $\sin\alpha$, (VI) mit $\cos\alpha$ und addirt, so erhält man $\sin(\varphi + \alpha) = \frac{bc\sin(\alpha + \gamma)}{R}$ (VIII); multiplicirt man (V) mit $\sin\gamma$, (VI) mit $\cos\gamma$ und subtrahirt, so erhält man $\sin(\varphi - \gamma) = \frac{ad\sin(\alpha + \gamma)}{R}$ (IX). Zur Berechnung dienen nacheinander die Gleichungen (III), (IV), (VII), (VIII) und (IX).

236. a, b, c, d, ε. Aufl. Der Durchschnittspunkt der Diagonalen

heiße E. Nun ist $AE^2 + EB^2 - 2\,AE\,.\,EB \cos\varepsilon = a^2$, $EB^2 + EC^2 + 2\,EB\,.\,EC \cos\varepsilon = b^2$, $EC^2 + ED^2 - 2\,EC\,.\,ED \cos\varepsilon = c^2$, $ED^2 + AE^2 + 2\,ED\,.\,AE \cos\varepsilon = d^2$. Subtrahirt man die Summe der ersten und dritten Gleichung von der Summe der zweiten und vierten, so erhält man $2\,ef \cos\varepsilon = b^2 + d^2 - a^2 - c^2$, folglich $F = \frac{1}{2}\,ef \sin\varepsilon = \frac{1}{4}\,(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)\,\mathrm{tg}\,\varepsilon$. Die Aufgabe ist somit auf 235 zurückgeführt, oder man kann auch die Auflösung in ähnlicher Weise wie dort ausführen.

Vierter Abschnitt.

Vermischte Aufgaben.

In den Aufgaben der folgenden Paragraphen ist irgend eine Figur gegeben, und es sollen zu derselben Punkte, gerade Linien oder Kreise gesucht werden, die bestimmten, in der Aufgabe vorgeschriebenen Bedingungen genügen. Soll ein Punkt gesucht werden, so ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten, wenn man seine Entfernungen von zwei gegebenen Punkten oder auch seine Entfernung von einem gegebenen Punkte und den Winkel gefunden hat, den die von ihm nach diesem gegebenen Punkte gezogene Linie mit einer der Richtung nach gegebenen geraden Linie bildet. Wird eine Linie gesucht, die durch einen gegebenen Punkt gehen soll, so genügt es, den Winkel zu berechnen, den sie mit einer durch diesen Punkt hindurchgehenden, der Richtung nach gegebenen Linie bildet. Soll die gesuchte Linie aber nicht durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen, so sucht man erst in der oben angegebenen Weise einen Punkt, in welchem sie eine gegebene gerade Linie schneidet und den Winkel, den sie mit derselben bildet, oder man berechnet auch die Stücke, die sie von den Schenkeln eines gegebenen Winkels abschneidet. Soll endlich ein Kreis gesucht werden, so sucht man in der oben angegebenen Weise seinen Mittelpunkt und hat dann noch die Länge seines Radius zu berechnen. Sehr häufig tritt der Fall ein, daß je nach der Lage der gegebenen Stücke verschiedene Fälle zu unterscheiden sind, die bei der Auflösung jeder für sich behandelt werden müssen. So kann z. B., wenn ein Winkel und ein Punkt gegeben ist, der Punkt innerhalb oder außerhalb des Winkels liegen; zwei gegebene Punkte können auf derselben oder auf verschiedenen

Seiten einer geraden Linie liegen. Sind zwei Kreise gegeben, so kann der eine außerhalb oder innerhalb des anderen liegen u. s. w. Von den dadurch entstehenden verschiedenen Fällen einer Aufgabe ist bei der im Folgenden mitgetheilten Auflösung meistentheils nur einer behandelt worden. Die Berechnung der übrigen gestaltet sich stets mehr oder minder ähnlich und ist daher nicht besonders durchgeführt.

§. 38.

Gegeben gerade Linien, Punkte, Dreiecke, gesucht gerade Linien oder Punkte.

a) Gegeben sei L || L′, P auf L, P′ auf L′, und P″ beliebig (hier zwischen L und L′). Durch P″ eine Linie XX′ (X auf L, X′ auf L′) so zu ziehen, daß sie gewissen Bedingungen genügt. Als bekannt sind anzusehen die von P″ respective auf L und L′ gefällten Senkrechten $P''Q = a$, $P''Q' = a'$, $PQ = c$, $P'Q' = c'$. Gesucht $\angle QP''X = \varphi$. Es ist $PX = c + a \operatorname{tg} \varphi$, $P'X' = c' - a' \operatorname{tg} \varphi$, $P''X = \frac{a}{\cos \varphi}$, $P''X' = \frac{a'}{\cos \varphi}$, $XX' = \frac{a + a'}{\cos \varphi}$. Setzt man diese Ausdrücke in die durch die Aufgabe gestellte Bedingungsgleichung ein, so kann man aus der so entstandenen Gleichung φ berechnen. Unter der angegebenen Bedingung XX′ durch P″ so zu ziehen, daß

1. $PX : P'X' = m : n$. Aufl. $n (c + a \operatorname{tg} \varphi) = m (c' - a \operatorname{tg} \varphi)$, daher $\operatorname{tg} \varphi = \frac{c'm - cn}{a'm + an}$.
2. $PX + P'X' = s$.
3. $PX - P'X' = d$.
4. $PX \,.\, P'X' = q^2$ (quadr. Gleichung).
5. $XX' = PX + P'X'$ (§. 3, 1).
6. $P''X' = P'X'$ (§. 3, 1).
7. $P''X' : P'X' = m : n$ (§. 3, 1).
8. $P''X' = PX$ (§. 3, 1).
9. $P''X' : PX = m : n$ (§. 3, 1).
10. $P''X' - P''X = PX - P'X'$ (§. 3, 1).
11. $PX + P''X = P'X' + P''X'$ (§. 3, 1).
12. Umfang von Trapez $PP'X'X = s$. Aufl. PP′ leicht zu berechnen (§. 3, 1).
13. Inhalt von Trapez $PP'X'X = F$ (2).
14. PP′X′X ein Tangententrapez wird (§. 3, 1).

b) Gegeben ist L || L′, P auf L, P′ auf L′, P″ auf PP′ (hier zwischen L und L′). Durch P″ die Linie XX′ (X auf L, X′ auf L′) so zu ziehen, daß sie gewissen Bedingungen genügt. Bekannt ist $PP'' = a$,

$P'P'' = a'$, und $\angle P''PX = \alpha$, gesucht $\angle PP''X = \varphi$. Es ist $PX = \frac{a \sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$, $P'X' = \frac{a' \sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$, $P''X = \frac{a \sin\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)}$, $P''X' = \frac{a' \sin\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)}$, $\triangle PP''X = \frac{a^2 \sin\alpha \sin\varphi}{2 \sin(\alpha+\varphi)}$, $\triangle P'P''X' = \frac{a'^2 \sin\alpha \sin\varphi}{2 \sin(\alpha+\varphi)}$. Diese Werthe sind in die Bedingungs-Gleichungen der Aufgabe einzusetzen und aus der so entstandenen Gleichung φ zu berechnen.

XX' durch P'' so zu ziehen, daß

15. $PX + P'X' = s$. Aufl. $\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{a+a'}{s}$ (§. 7, 2).
16. $PX - P'X' = d$ (15). 17. $P''X + P''X' = s$.
18. $P''X - P''X' = d$.
19. $PX \,.\, P'X' = q^2$. Aufl. $\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{aa'}}{q}$ (§. 7, 2).
20. $P''X \,.\, P''X' = q^2$.
21. $\triangle PP''X + \triangle P'P''X' = s^2$. Aufl. $\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{(a^2+a'^2)\sin\alpha}{s^2}$ (§. 7, 2).
22. $\triangle PP''X - \triangle P'P''X' = d^2$ (21).
23. $PX + P'X' + P''X + P''X' = s$. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)} = \frac{a+a'}{s}$ (§. 7, 11).
24. Gegeben sei L, und P und P' auf derselben Seite von L. X auf L so zu bestimmen, daß PX und P'X mit L gleiche Winkel bilden. Bekannt sind die auf L gefällten Lothe $PQ = a$, $P'Q' = a'$, $QQ' = c$, gesucht $\angle PXQ = P'XQ' = \varphi$. Aufl. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a+a'}{c}$.
25. Gegeben sei L, und P und P' auf verschiedenen Seiten von L. Auf L den Punkt X so zu bestimmen, daß $\angle PXP'$ durch L halbirt wird. Aufl. ähnlich wie 24.
26. Gegeben sei $\angle BAC = \alpha$ und innerhalb desselben P und P'. (Bekannt die Lothe $PB = a$, $P'C = a'$, $AB = b$, $AC = b'$). Die gebrochene Linie PXX'P' (X auf AB, X' auf AC) so zu ziehen, daß $\angle PXB = X'XA$ und $\angle XX'A = P'X'C$ wird. Aufl. Gesucht wird $\angle PXB = \varphi$, $\angle P'X'C = \varphi'$. Aus $AX = b - a\cot\varphi$, $AX' = b' - a'\cot\varphi'$ und $AX : AX' = \sin\varphi' : \sin\varphi$ erhält man $b \sin\varphi - a \cos\varphi = b' \sin\varphi' - a' \cos\varphi'$, oder,

wenn man die Hülfswinkel $\operatorname{tg} \varkappa = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} \varkappa' = \frac{a'}{b'}$ einführt, $\frac{\sin(\varphi - \varkappa)}{\sin(\varphi' - \varkappa')} = \frac{b' \cos \varkappa}{b \cos \varkappa'}$ (§. 7, 1).

c) Gegeben $\angle$ BAC $= \alpha$, P auf AC (PA $=$ a). Man soll die Linie XY, welche AB in Y unter $\angle\ \beta$ schneidet, so ziehen, daß

27. PX : PY $=$ m : n (Sinussatz für $\triangle$ PXY, gesucht $\angle$ XPY $= \varphi$).
28. XY : PY $=$ m : n (27).
29. PX : XY $=$ m : n (27), (§. 7, 2).

d) Ein Dreieck ABC zu berechnen, wenn $\angle$ ACB $= \gamma$ der Größe und Lage nach gegeben ist, und AB durch P (hier innerhalb $\angle$ ACB) gehen und dabei gewisse Bedingungen erfüllen soll. Bekannt ist CP $=$ t, $\angle$ ACP $= \varepsilon$, $\angle$ BCP $= \zeta$, gesucht außer den fehlenden Dreiecksstücken noch $\angle$ APC $= \varphi$. Es ist AP $= \frac{t \sin \varepsilon}{\sin \alpha} = \frac{t \sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \varphi)}$, BP $= \frac{t \sin \zeta}{\sin \beta} = \frac{t \operatorname{tin} \zeta}{\sin(\varphi - \zeta)}$, a $= \frac{t \sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{t \sin \varphi}{\sin(\varphi - \zeta)}$, b $= \frac{t \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{t \sin \varphi}{\sin(\varphi + \varepsilon)}$, c $= \frac{t \sin \varphi \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{t \sin \varphi \sin \gamma}{\sin(\varphi + \varepsilon) \sin(\varphi - \zeta)}$. Für die Aufgaben 37 bis 43 empfiehlt es sich, die gegebenen Stücke wie in §. 14 durch r, γ und $\alpha - \beta = \delta$ auszudrücken. Setzt man $\varepsilon - \zeta = \delta'$, so ist $t = \frac{h_c}{\sin \varphi}$ und $\varphi = {}^1/_2 \pi - {}^1/_2 (\delta' + \delta)$, folglich nach §. 14 $t = \frac{2 r \sin \alpha \sin \beta}{\cos {}^1/_2 (\delta' + \delta)} = \frac{r(\cos \delta + \cos \gamma)}{\cos {}^1/_2 (\delta' + \delta)} = \frac{2 r (\cos {}^1/_2 \delta^2 - \sin {}^1/_2 \gamma^2)}{\cos {}^1/_2 (\delta' + \delta)} = \frac{2 r (\cos {}^1/_2 \gamma^2 - \sin {}^1/_2 \delta^2)}{\cos {}^1/_2 (\delta' + \delta)}$. Durch Einsetzung der betreffenden Werthe in die Bedingungsgleichung erhält man eine Gleichung, aus der φ oder α und β zu berechnen sind. In 37 bis 42 ist r aus der Gleichung für t und der für das gegebene Stück (§. 14) zu eliminiren. AB durch P so zu ziehen, daß

30. AC $=$ AB
31. AC $=$ BC
32. PA $=$ PB (§. 7, 1)
33. PA : PB $=$ m : n (§. 7, 1)
34. AC : BC $=$ m : n (§. 7, 1)
35. AC : AB $=$ m : n
36. PA . PB $= q^2$ (§. 6, 1).
37. AC $+$ BC $=$ s. 1. Aufl. $2 t \cos {}^1/_2 \gamma \cos({}^1/_2 \delta' + \delta) - s \cos \delta = s \cos \gamma - 2 t \cos {}^1/_2 \gamma \cos {}^1/_2 \delta'$ (§. 3, 4). 2. Aufl. Man ziehe PD || AC bis zu BC und PE || BC bis zu AC, so sind PD $=$ EC und PE $=$ DC zu berechnen, daher AE $+$ DB bekannt und AE . DB $=$ PE . PD (§. 10).

38. BC — AC = d. 1. Aufl. $(2t \sin {}^1/_2\gamma \sin {}^1/_2\delta' - d)\cos\delta + 2t\sin {}^1/_2\gamma \cos {}^1/_2\delta' \sin\delta = d\cos\gamma + 2t\sin {}^1/_2\gamma \sin {}^1/_2\delta'$ (§. 3, 1). 2. Aufl. wie 37, 2. Aufl.

39. AC . BC = q^2. 1. Aufl. $t^2\cos(\delta' + \delta) - q^2\cos\delta = q^2\cos\gamma - t^2$ (§. 3, 4). 2. Aufl. $\cot\varphi^2 - \frac{\sin(\varepsilon - \zeta)}{\sin\varepsilon \sin\zeta}\cot\varphi + \frac{t^2 - q^2\cos\varepsilon\cos\zeta}{q^2\sin\varepsilon\sin\zeta} = 0$.

40. AB + BC + CA = 2s. Aufl. $s\cos {}^1/_2\delta - t\cos {}^1/_2\gamma \cos {}^1/_2(\delta' + \delta) = s\sin {}^1/_2\gamma$ (§. 3, 4).

41. Inhalt von ABC = △ (39).

42. ρ gegeben. Aufl. $t\sin {}^1/_2\gamma \cos {}^1/_2(\delta' + \delta) - \varrho\cos {}^1/_2\delta = \varrho\sin {}^1/_2\gamma$ (§. 3, 4).

43. ϱ_c gegeben (42). 44. ϱ_a gegeben (42).

45. Vom Punkte C gehen L, L′, L″ aus. Eine dieselben resp. in A, D, B schneidende Gerade so zu ziehen, daß AD = e, DB = f wird. Bekannt ∠ ACD = ε, ∠ DCB = ζ, e, f; gesucht α, β. Aufl. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{f\sin\varepsilon}{e\sin\zeta}$ (§. 7, 1).

e) Das Dreieck ABC zu berechnen, wenn AB = c der Lage und Größe nach gegeben ist und C auf der der Lage nach gegebenen Geraden L liegen soll. L schneide (die Verlängerung von) AB in D. Bekannt ist außer c noch BD = f und ∠ BDC = ϰ. Auch die auf L gefällten Lothe AE = k, BF = l, ebenso EF = g kann man als bekannt ansehen, da sich diese Stücke aus c, f, ϰ leicht berechnen lassen. Gesucht werden außer den Dreiecksstücken noch ∠ BCD = β' und π — ACD = α'. Es ist $f = \frac{a\sin\beta'}{\sin\varkappa} = \frac{c\sin\alpha\sin\beta'}{\sin\gamma\sin\varkappa}$, $f + c = \frac{b\sin\alpha'}{\sin\varkappa} = \frac{c\sin\beta\sin\alpha'}{\sin\gamma\sin\varkappa}$, oder, da $\beta' = \beta - \varkappa$, $\alpha' = \alpha + \varkappa$ ist,

$$f = \frac{c\sin\alpha\sin(\beta - \varkappa)}{\sin\gamma\sin\varkappa} \text{ (I) und } f + c = \frac{c\sin\beta\sin(\alpha + \varkappa)}{\sin\gamma\sin\varkappa} \text{ (II).}$$

Durch Addition beider Gleichungen findet man noch $\frac{2f + c}{c} = \frac{\cos(\varkappa + \delta) + \cos\gamma\cos\varkappa}{\sin\gamma\sin\varkappa}$ (III). Zu beachten sind noch die Formeln

$$a = \frac{l}{\sin\beta'} \text{ (IV)}, \quad b = \frac{k}{\sin\alpha'} \text{ (V)}, \quad g = k\cot\alpha' + l\cot\beta' \text{ (VI)}.$$

Die drei ersten Aufgaben sind mittelst der Hauptfälle zu lösen.

△ ABC zu berechnen, wenn gegeben

46. h_c. 47. p. 48. q. 49. γ (III) (§. 3, 2).

50. δ (III) (§. 3, 1). 51. r (49).

52. u, v. Aufl. Durch Division der Ausdrücke für f und f + c ergiebt sich $\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{(f+c)\,u}{fv}$, ferner ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u}{v}$ und $\alpha' - \alpha = \varkappa$, $\beta' - \beta = -\varkappa$ (§. 9, 6).

53. a + b = s. Aufl Aus $\frac{k}{\sin\alpha'} + \frac{l}{\sin\beta'} = s$ und (VI) ergiebt sich durch Elimination von β' $(k^2 - l^2 + s^2 - g^2)\sin\alpha' + 2\,gk\cos\alpha' = 2\,sk$ (§. 3, 1).

54. a — b = d (53).

Unter denselben Umständen wie bisher $\triangle$ ABC zu berechnen, wenn die Bedingung gegeben, daß

55. AC = BC. Aufl. In (III) ist $\delta = 0$ zu setzen.

56. $\alpha = 2\beta$. Aufl. In $\frac{f+c}{f} = \frac{\sin(\alpha+\varkappa)\,\sin\beta}{\sin(\beta-\varkappa)\,\sin\alpha}$ setze man 2β für α ein. Es ergiebt sich $c\cos\varkappa\,\sin 2\beta - (2f+c)\sin\varkappa\cos 2\beta = (f+c)\sin\varkappa$ (§. 3, 1).

57. $\alpha' = 2\beta'$. 1. Aufl. $\frac{f+c}{f} = \frac{\sin\beta\,\sin\alpha'}{\sin\alpha\,\sin\beta'} = \frac{\sin(\beta'+\varkappa)\sin\alpha'}{\sin(\alpha'-\varkappa)\sin\beta'} = \frac{\sin(\beta'+\varkappa)\sin 2\beta'}{\sin(2\beta'-\varkappa)\sin\beta'} = \frac{2\sin(\beta'+\varkappa)\cos\beta'}{\sin(2\beta'-\varkappa)}$, daraus $c\cot\varkappa\,\sin 2\beta' - (2f+c)\cos 2\beta' = f$ (§. 3, 1). 2. Aufl. In (VI) $\alpha' = 2\beta'$ gesetzt, giebt $\cot\beta'^2 - \frac{2g}{k+2l}\cot\beta' - \frac{k}{k+2l} = 0$.

58. Gegeben sind vier Punkte A, E, F, B in gerader Linie (AE = d, EF = e, FB = f). Ueber AB als Grundlinie ein Dreieck ABC so zu konstruiren, daß $\angle$ ACB durch CE und CF in drei gleiche Theile getheilt wird. Aufl. Setzt man $\angle$ CEF = λ, CFE = μ, so erhält man zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ die fünf Gleichungen $\frac{\sin\alpha}{\sin\mu} = \frac{e}{d}$, $\frac{\sin\beta}{\sin\lambda} = \frac{e}{f}$, $\lambda = \alpha + {}^1\!/_3\gamma$, $\mu = \beta + {}^1\!/_3\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Mittelst der drei letzten Gleichungen, aus denen noch $\lambda + \mu = \pi - {}^1\!/_3\gamma$, $\lambda - \mu = \alpha - \beta$ folgt, kann man sämmtliche Winkel durch γ und $\alpha - \beta = \delta$ ausdrücken. Man erhält $\alpha = {}^1\!/_2\pi - {}^1\!/_2(\gamma - \delta)$, $\beta = {}^1\!/_2\pi - {}^1\!/_2(\gamma+\delta)$, $\lambda = {}^1\!/_2\pi - {}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma - \delta)$, $\mu = {}^1\!/_2\pi - {}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma + \delta)$. Durch Einsetzen dieser Werthe in die beiden ersten Gleichungen entsteht $\frac{\cos{}^1\!/_2(\gamma-\delta)}{\cos{}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma+\delta)} = \frac{e}{d}$, $\frac{\cos{}^1\!/_2(\gamma+\delta)}{\cos{}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma-\delta)} = \frac{e}{f}$ und durch bekannte Entwicklung $\operatorname{tg}{}^1\!/_3\gamma\;\operatorname{tg}{}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma-\delta) = \frac{d-e}{d+e}$, $\operatorname{tg}{}^1\!/_3\gamma\;\operatorname{tg}{}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma+\delta) = \frac{f-e}{f+e}$.

Nach Elimination von δ mit Hülfe der Gleichung $\operatorname{tg} {}^1\!/_3\gamma = \operatorname{tg}\left({}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma - \delta) + {}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma + \delta)\right) = \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma - \delta) + \operatorname{tg} {}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma + \delta)}{1 - \operatorname{tg} {}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma - \delta)\operatorname{tg} {}^1\!/_2({}^1\!/_3\gamma + \delta)}$ ergiebt sich schließlich $\cos {}^1\!/_3\gamma^2 = \frac{(f + e)(d + e)}{4\,fd}$.

f) Gegeben ist ein Dreieck ABC. Durch die Spitze C eine Linie (hier innerhalb $\angle$ ACB) so zu ziehen, daß, nachdem auf dieselbe die Senkrechten AX und BY gefällt sind, die Stücke AX, BY, CX, CY, $\triangle$ ACX, $\triangle$ BCY noch irgend einer in der Aufgabe gestellten Bedingung genügen. Bekannt sind sämmtliche Stücke von $\triangle$ ABC (die nicht direct gegebenen sind erst zu berechnen), gesucht wird $\angle$ ACX $= \varphi$, $\angle$ BCY $= \psi$, wobei $\varphi + \psi = \gamma$. Es ist AX $= b \sin\varphi$, BY $= a \sin\psi$, CX $= b \cos\varphi$, CY $= a \cos\psi$. Zuweilen ist es vortheilhaft, sämmtliche gegebenen Stücke durch den Radius r des ABC umschriebenen Kreises und die Winkel γ, $\alpha - \beta = \delta$, $\varphi - \psi = \vartheta$ auszudrücken. So ist u. A. AX + BY $= b \sin\varphi + a \sin\psi = 2\,r\,(\sin\beta \sin\varphi + \sin\alpha \sin\psi)$; nach Einsetzung der Werthe $\alpha = {}^1\!/_2\pi - {}^1\!/_2(\gamma - \delta)$, $\beta = {}^1\!/_2\pi - {}^1\!/_2(\gamma + \delta)$, $\varphi = {}^1\!/_2(\gamma + \vartheta)$, $\psi = {}^1\!/_2(\gamma - \vartheta)$ erhält man AX + BY $= 2\,r\left(\cos {}^1\!/_2(\gamma + \delta)\sin {}^1\!/_2(\gamma + \vartheta) + \cos {}^1\!/_2(\gamma - \delta)\sin {}^1\!/_2(\gamma - \vartheta)\right) = r\left\{\sin\left(\gamma + {}^1\!/_2(\delta + \vartheta)\right) - \sin {}^1\!/_2(\delta - \vartheta) + \sin\left(\gamma - {}^1\!/_2(\delta + \vartheta)\right) + \sin {}^1\!/_2(\delta - \vartheta)\right\} = 2\,r \sin\gamma \cos {}^1\!/_2(\delta + \vartheta) = c \cos {}^1\!/_2(\delta + \vartheta)$. Aehnlich leitet man XY $=$ CY $-$ CX $= 2\,r \sin\gamma \sin {}^1\!/_2(\delta + \vartheta) = c \sin(\delta + \vartheta)$ her. Die entsprechenden Ausdrücke für AX $-$ BY und CX + CY fallen minder einfach aus.

Unter den obigen Bedingungen durch C eine Linie so zu ziehen, daß

59. AX = BY (§. 7, 1)
60. AX : BY = m : n (§. 7, 1)
61. CX : CY = m : n (§. 7, 5)
62. CX = BY (§. 7, 3)
63. CX : BY = m : n (§. 7, 3)
64. AX . BY = q^2 (§. 6, 1)
65. CX . CY = q^2 (§. 6, 5)
66. AX . CY = q^2 (§. 6, 3).
67. AX + BY = s (§. 3, 3). 2. Aufl. $\cos {}^1\!/_2(\delta + \vartheta) = \frac{s}{c}$.
68. XY gegeben (67).
69. AX $-$ BY = d (§. 3, 3).
70. CX + CY = s (§. 3, 5).
71. AX + BY = CX + CY. Aufl. $b \sin\varphi + a \sin\psi = b \cos\varphi + a \cos\psi$ oder $b(\sin\varphi - \cos\varphi) = a(\cos\psi - \sin\psi)$, daher $\frac{\sin(\varphi - {}^1\!/_4\pi)}{\sin({}^1\!/_4\pi - \psi)} = \frac{a}{b}$ (§. 7, 2).
72. BY $-$ AX = XY (71).
73. AX + BY = XY (71). 2. Aufl. $\operatorname{tg} {}^1\!/_2(\delta + \vartheta) = 1$, daher ${}^1\!/_2(\delta + \vartheta) = {}^1\!/_4\pi$, $\vartheta = {}^1\!/_2\pi - \delta$, $\varphi = {}^1\!/_2\pi$, $\psi = \gamma - {}^1\!/_2\pi$.

74. BY — AX = CX + CY (71). 2. Aufl. $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\vartheta + \frac{1}{4}\pi) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma^2$.

75. AX + BY : CX + CY = m : n. Aufl. $n(b\sin\varphi + a\sin\psi) = m(b\cos\varphi + a\cos\psi)$, oder $b(n\sin\varphi - m\cos\varphi) = a(m\cos\psi - n\sin\psi)$. Dividirt man durch n und setzt $\frac{m}{n} = \operatorname{tg}\chi$, so erhält man $\frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\chi - \psi)} = \frac{a}{b}$ (§. 7, 2). 2. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta - \vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta + \vartheta)} = \frac{n\sin\gamma - m\cos\gamma}{m}$ (§. 3, 2 und §. 7, 5).

76. BY — AX : XY = m : n (75).

77. BY + AX : XY = m : n (75). 2. Aufl. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta + \vartheta) = \frac{n}{m}$.

78. BY — AX : CX + CY = m : n (75).

79. AX . BY : CX . CY = m : n (§. 6, 7).

80. AX . CY : BY . CX = m : n (§. 6, 9).

81. △ ACX = △ BCY. Aufl. △ ACX = $\frac{1}{4}b^2\sin 2\varphi$, △ BCY = $\frac{1}{2}a^2\sin 2\psi$, daher $\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\psi} = \frac{a^2}{b^2}$ (§. 7, 1).

82. △ ACX : BCY = m : n (81).

83. △ ACX + △ BCY = F (81), (§. 3, 3).

84. △ ACX — △ BCY = F (81), (§. 3, 3).

85. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Durch C nach AB eine Linie CX so zu ziehen, daß AX : CX = CX : BX. Aufl. Setzt man ∠ ACX = φ, BCX = ψ, so ist $\sin\varphi\sin\psi = \sin\alpha\sin\beta$ (§. 6, 1).

g) Gegeben ist ein Dreieck ABC. Auf AB einen Punkt Z (hier zwischen A und B) so zu bestimmen, daß, wenn XZ ⊥ AC und XY ⊥ BC gefällt werden, noch einer in der Aufgabe gestellten Bedingung genügt wird. Bekannt sind sämmtliche Stücke des Dreiecks, gesucht wird CZ = t, ∠ ACZ = φ, ∠ BCZ = ψ. Ferner werde $\varphi - \psi$ mit ϑ bezeichnet. Sämmtliche Strecken des Dreiecks (ZX, CX, AZ 2c.) lassen sich durch den Radius r des umschriebenen Kreises und die Winkel oder, was oft vortheilhafter ist, durch r, γ, $\alpha - \beta = \delta$ und $\varphi - \psi = \vartheta$ ausdrücken. Es ist $AZ = \frac{b\sin\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{2r\cos\frac{1}{2}(\gamma + \delta)\sin\frac{1}{2}(\gamma + \vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta + \vartheta)}$; $BZ = \frac{a\sin\psi}{\sin(\beta + \psi)} = \frac{2r\cos\frac{1}{2}(\gamma - \delta)\sin\frac{1}{2}(\gamma - \vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta + \vartheta)}$; $XZ = t\sin\varphi = AZ\sin\alpha = \frac{b.\sin\alpha\sin\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{r(\cos\delta + \cos\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma + \vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta + \vartheta)} = \frac{h_c\sin\frac{1}{2}(\gamma + \vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta + \vartheta)}$; $YZ = t\sin\psi$

$= BZ \sin\beta = \frac{a \sin\beta \sin\psi}{\sin(\beta+\psi)} = \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \sin\psi}{\sin(\beta+\psi)} =$
$\frac{r(\cos\delta + \cos\gamma) \sin {}^1\!/_2 (\gamma - \vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)} = \frac{h_c \sin {}^1\!/_2 (\gamma - \vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta + \vartheta)}$; $AX =$
$AZ \cos\alpha = \frac{2r \cos\alpha \sin\beta \sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{2r \cos\alpha \sin\beta \sin {}^1\!/_2 (\gamma+\vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)} =$
$\frac{r(\sin\gamma - \sin\delta) \sin {}^1\!/_2 (\gamma+\vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)}$; $BY = BZ \cos\beta = \frac{2r \sin\alpha \cos\beta \sin\psi}{\sin(\beta+\psi)} =$
$\frac{2r \sin\alpha \cos\beta \sin {}^1\!/_2 (\gamma-\vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)} = \frac{r(\sin\gamma + \sin\delta) \sin {}^1\!/_2 (\gamma-\vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)}$;

$CX = t\cos\varphi = ZX \cot\varphi = \frac{b \sin\alpha \cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} =$
$\frac{2r \sin\alpha \sin\beta \cos {}^1\!/_2 (\gamma+\vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)} = \frac{r(\cos\delta + \cos\gamma) \cos {}^1\!/_2 (\gamma+\vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)} =$
$\frac{h_c \cos {}^1\!/_2 (\gamma+\vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)}$; $CY = t\cos\psi = ZY \cot\psi = \frac{a \sin\beta \cos\psi}{\sin(\beta+\psi)}$
$= \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \cos\psi}{\sin(\beta+\psi)} = \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \cos {}^1\!/_2 (\gamma-\vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)}$
$= \frac{r(\cos\delta + \sin\gamma) \cos {}^1\!/_2 (\gamma-\vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)} = \frac{h_c \cos {}^1\!/_2 (\gamma-\vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)}$;
$t = \frac{2r \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{r(\cos\delta + \cos\gamma)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)} = \frac{h_c}{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)}$.

Zu beachten ist noch $\sin(\alpha+\varphi) = \sin(\beta+\psi)$.

Unter den obigen Bedingungen Z auf AB so zu bestimmen, daß

86. $ZX : ZY = m : n$ (§. 7, 1)
87. $CX : CY = m : n$ (§. 7, 5)
88. $AX = BY$ (§. 7, 1)
89. $AX : BY = m : n$ (§. 7, 1)
90. $AZ = YZ$ (§. 7, 1)
91. $AZ : YZ = m : n$ (§. 7, 1)
92. $AZ = CX$
93. $AZ : CX = m : n$
94. $AZ = CY$ (§. 7, 3)
95. $AZ : CY = m : n$ (§. 7, 3)
96. $AZ = BY$ (§. 7, 1)
97. $AZ : BY = m : n$ (§. 7, 1)
98. $XZ = BY$ (§. 7, 1)
99. $XZ : BY = m : n$ (§. 7, 1)
100. $XZ : CY = m : n$ (§. 7, 3)
101. $BY = CX$ (§. 7, 3)
102. $BY : CX = m : n$ (§. 7, 3)
103. $BY = CZ$
104. $BY : CZ = m : n$
105. $CX : CY = AX : BY$ (§. 6, 9)
106. $CX : CY = BY : AX$ (§. 7, 1)
107. $CX . CY = AX . BY$ (§. 6, 7).
108. $CX . CY : ZX . ZY = m : n$ (§. 6, 11).
109. $CX . CY : AX . BY = m : n$ (§. 6, 7).
110. $CX . AX : CY . BY = m : n$ (§. 7, 1).
111. $XZ + XY = s$. Aufl. $\frac{\cos {}^1\!/_2 (\delta+\vartheta)}{\cos {}^1\!/_2 \vartheta} = \frac{2 h_c \sin {}^1\!/_2 \gamma}{s}$ (§. 7, 6).

112. XZ — YZ = d. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}=\frac{2h_c\cos\frac{1}{2}\gamma}{d}$ (§. 7, 4).

113. CX + CY = s. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}=\frac{2h_c\cos\frac{1}{2}\gamma}{s}$ (§. 7, 6).

114. CY — CX = d. Aufl. $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}=\frac{2h_c\sin\frac{1}{2}\gamma}{d}$ (§. 7, 4).

115. AX + BY = s. Aufl. $s=\frac{2r}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}(\cos\alpha\sin\beta\sin\frac{1}{2}(\gamma+\vartheta)$ $+\sin\alpha\cos\beta\sin\frac{1}{2}(\gamma-\vartheta)=\frac{2r}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}(\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\gamma\cos\frac{1}{2}\vartheta$ $-\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\delta\sin\frac{1}{2}\vartheta)$. Dividirt man durch $\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\delta$ und führt den Hülfswinkel λ ein durch die Gleichung $\cot\lambda=\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\delta}$ $=\frac{2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\sin\delta}$, so wird $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}{\cos(\lambda+\frac{1}{2}\vartheta)}=\frac{2r\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\delta}{s\sin\lambda}$ $=\frac{2r\sin\gamma\sin\frac{1}{2}\gamma}{s\cos\lambda}$ (§. 7, 6).

116. AX — BY = d (115). 117. XZ + YZ = CZ (§. 4, 1).

118. CX + CY = CZ (§. 4, 5).

119. AX + BY = CZ. Aufl. $\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\gamma\cos\frac{1}{2}\vartheta-\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\delta\sin\frac{1}{2}\vartheta$ $=\sin\alpha\sin\beta$ (§. 3, 1).

120. BY — AX = CZ (119).

121. CX + CY = AX + BY. Aufl. $\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\psi-\beta)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (§. 7, 2).

122. CX — CY = AX — BY (121).

123. CX — CY = BY — AX (121).

124. CX + CY + ZX + ZY = s. Aufl. $s=\frac{2h_c\cos\frac{1}{2}\vartheta(\cos\frac{1}{2}\gamma+\sin\frac{1}{2}\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}$, daher $\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}=\frac{2\sqrt{2}\,h_c\sin(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\gamma)}{s}$ (§. 7, 6).

125. XZ . YZ = q^2. Aufl. $h_c^2\cos\vartheta-q^2\cos(\delta+\vartheta)=$ $q^2+h_c^2\cos\gamma$ (§. 3, 6).

126. CX . CY = q^2. Aufl. $h_c^2\cos\vartheta-q^2\cos(\delta+\vartheta)=$ $q^2-h_c^2\cos\gamma$ (§. 3, 6).

127. AX . BY = q^2. Aufl. $\cos\vartheta-\frac{q^2}{r^2\sin2\alpha\sin2\beta}\cos(\delta+\vartheta)$ $=\cos\gamma+\frac{q^2}{r^2\sin2\alpha\sin2\beta}$ (§. 3, 1 oder 5).

128. CX — AX : CY — BY = m : n. Aufl. $\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta-\psi)}=\frac{ma}{nb}$ (§. 7, 1).

129. $\triangle$ CXZ = F. Aufl. $F = \frac{h_c^2 \sin(\gamma + \vartheta)}{4 \cos^{1}/_{2}(\delta + \vartheta)^2}$, daher $h_c^2 \sin(\gamma + \vartheta) - 2F \cos(\delta + \vartheta) = 2F$ (§. 3, 3).

130. $\triangle$ CXZ : $\triangle$ CYZ = m : n. Aufl. $\frac{\sin(\gamma + \vartheta)}{\sin(\gamma - \vartheta)} = \frac{m}{n}$ (§. 7, 1).

131. $\triangle$ AXZ = $\triangle$ BYZ. Aufl. $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \sqrt{\operatorname{tg} \alpha \cot \beta}$ (§. 7, 1).

h) Ein gegebenes Dreieck ABC durch eine Linie CZ (Z auf AB) in zwei Theile zu theilen, die einer gegebenen Bedingung genügen. Bekannt sind die Elemente von $\triangle$ ABC, gesucht CZ = t, $\angle$ ACZ = φ, BCZ = ψ oder $\varphi - \psi = \vartheta$.

Die Linie CZ so zu ziehen, daß $\triangle$ ACZ und BCZ

132. einander gleich sind. Aufl. $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{a}{b}$ (§. 7, 1).

133. sich wie m : n verhalten (132).

134. gleiche Radien innerer Berührungskreise haben. Aufl. Der Radius des inneren Berührungskreises von $\triangle$ ACZ ist $\frac{t}{\cot^{1}/_{2}\varphi + \operatorname{tg}^{1}/_{2}(\alpha + \varphi)}$ und für $\triangle$ BCZ ist er $\frac{t}{\cot^{1}/_{2}\psi + \operatorname{tg}^{1}/_{2}(\beta + \psi)}$, daher $\operatorname{tg}^{1}/_{2}(\alpha + \varphi) - \operatorname{tg}^{1}/_{2}(\beta + \psi) = \cot^{1}/_{2}\psi - \cot^{1}/_{2}\varphi$. Nach weiterer Entwicklung, und indem man schließlich sämmtliche Winkel durch γ, $\delta = \alpha - \beta$ und ϑ ausdrückt, ergiebt sich $\sin^{1}/_{2}(\delta + \vartheta) = \frac{\sin^{1}/_{2}\delta}{\cos^{1}/_{2}\gamma}$.

135. gleiche Radien äußerer Berührungskreise an AZ und BZ haben (134).

i) Gegeben ist ein Dreieck ABC. Es soll eine Linie gezogen werden, die AC in X, BC in Y und die Verlängerung von AB in Z schneidet und dabei noch andere Bedingungen erfüllt. Bekannt sind die Elemente von $\triangle$ ABC, gesucht $\angle$ BZY = φ, AX, BY, XY. Indem man von X und Y Lothe auf AB fällt, leitet man leicht die Gleichungen $AX \sin\alpha - BY \sin\beta = XY \sin\varphi$ und $AX \cos\alpha + BY \cos\beta = c - XY \cos\varphi$ her. Zu diesen Gleichungen liefert die Bedingung der Aufgabe stets noch zwei andere Gleichungen, so daß vier Gleichungen zur Bestimmung von AX, BY, XY, φ vorhanden sind.

Die Linie XYZ so zu ziehen, daß

136. AX = BY = XY. Aufl. $\sin\varphi = \sin\alpha - \sin\beta$.

137. AX : BY : XY = m : n : p. Aufl. $\sin\varphi = \frac{m \sin\alpha - n \sin\beta}{p}$.

138. AX + BY = XY, AX : BY = m : n (137).

139. AX − BY = XY, AX : BY = m : n (137).

140. $XY = f$ und $AX + BY = s$. Aufl. $\cos(\varphi + {}^1\!/_2\,\delta) = \frac{c\cos{}^1\!/_2\,\delta - s\sin{}^1\!/_2\,\gamma}{f}$.

141. $XY = f$ und $AX - BY = d$. Aufl. $\sin(\varphi + {}^1\!/_2\,\delta) = \frac{d\cos{}^1\!/_2\,\gamma + c\sin{}^1\!/_2\,\delta}{f}$.

142. $XY = f$, $AX = BY$. Aufl. $\sin(\varphi + {}^1\!/_2\,\delta) = \frac{c\sin{}^1\!/_2\,\delta}{f}$.

143. $XY = f$, $CX = BY$ (140).

144. Gegeben ist $\triangle ABC$. Eine Linie XZY (X auf der Verlängerung von AC über A hinaus, Y auf BC, Z auf AB) so zu ziehen, daß XZ und YZ den gegebenen Linien k und m gleich werden. Gesucht $\angle AZX = \varphi$. Aufl. $AZ = \frac{k\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha}$, $BZ = \frac{m\sin(\beta + \varphi)}{\sin\beta}$, mithin $k\sin\beta\sin(\alpha - \varphi) + m\sin\alpha\sin(\beta + \varphi) = c\sin\alpha\sin\beta$, daher $(k + m)\cos\varphi - (k\cot\alpha - m\cot\beta)\sin\varphi = c$.

k) Innerhalb des gegebenen Dreiecks ABC einen Punkt Z zu bestimmen, der noch gegebenen Bedingungen genügt. Bekannt sind die Stücke von $\triangle ABC$, gesucht $\angle BAZ = \alpha_1$, $CAZ = \alpha_2$, $CBZ = \beta_1$, $ABZ = \beta_2$, $ACZ = \gamma_1$, $BCZ = \gamma_2$.

Den Punkt Z so zu bestimmen, daß

145. die von ihm auf BC, CA, AB gefällten Senkrechten sich wie $k : l : m$ verhalten. Aufl. $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{l}{m}$ (§. 7, 1) u. s. w.

146. $\triangle BCZ = CAZ = ABZ$. Aufl. $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{c}{b}$ u. s. w. (§. 7, 1).

147. $\triangle BCZ : CAZ : ABZ = k : l : m$ (146).

148. $AZ + CZ = s$, $BZ + CZ = s'$. Aufl. $\frac{AZ}{b} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin(\alpha_2 + \gamma_1)}$, $\frac{CZ}{b} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2 + \gamma_1)}$, mithin $\frac{s}{b} = \frac{\sin\alpha_2 + \sin\gamma_1}{\sin(\alpha_2 + \gamma_1)} = \frac{\cos{}^1\!/_2(\alpha_2 - \gamma_1)}{\cos{}^1\!/_2(\alpha_2 + \gamma_1)}$ oder $\frac{s - b}{s + b} = \operatorname{tg}{}^1\!/_2\alpha_2\,\operatorname{tg}{}^1\!/_2\gamma_1$ (I), ebenso $\frac{s' - a}{s' + a} = \operatorname{tg}{}^1\!/_2\beta_1\,\operatorname{tg}{}^1\!/_2\gamma_2$ (II). Setzt man ferner der Abkürzung halber $s' - s = d$, so ist $BZ - AZ = d$, und man leitet ähnlich wie vorher $\frac{c - d}{c + d} = \frac{\operatorname{tg}{}^1\!/_2\beta_2}{\operatorname{tg}{}^1\!/_2\alpha_1}$ (III) her. Diese drei Gleichungen (I, II, III) in Verbindung mit $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 + \beta_2 = \beta$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ sind ausreichend zur Berechnung der sechs unbekannten Winkel. Setzt

man den aus (II) entwickelten Werth von $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_1$ in $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_2 = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_1}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_1}$ ein, so erhält man $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_2 = \frac{s' (\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta - \cot \frac{1}{2}\gamma_2) + a (\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta + \cot \frac{1}{2}\gamma_2)}{s' (1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \cot \frac{1}{2}\gamma_2) + a (1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \cot \frac{1}{2}\gamma_2)} = \frac{- s' \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma_2) + a \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma_2)}{s' \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma_2) - a \sin \frac{1}{2} (\beta - \gamma_2)}$. Ebenso leitet man die Gleichung $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{- s \cos \frac{1}{2} (\alpha + \gamma_1) + b \cos \frac{1}{2} (\alpha - \gamma_1)}{s \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma_1) - b \sin \frac{1}{2} (\alpha - \gamma_1)}$ her. Diese Werthe für $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta_2$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha_1$ in (III) eingesetzt, giebt

$$\frac{\left(- s' \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma_2) + a \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma_2)\right)\left(s \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma_1) - b \sin \frac{1}{2} (\alpha - \gamma_1)\right)}{\left(s' \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma_2) - a \sin \frac{1}{2} (\beta - \gamma_2)\right)\left(- s \cos \frac{1}{2} (\alpha + \gamma_1) + b \cos \frac{1}{2} (\alpha - \gamma_1)\right)} = \frac{c - d}{c + d}.$$

Führt man die angedeutete Multiplication aus, addirt und subtrahirt dann auf beiden Seiten 1 und dividirt die hierdurch erhaltenen Gleichungen, so erhält man, $\gamma_1 - \gamma_2 = \eta$ gesetzt,

$$\frac{- ss' + sa \cos \frac{1}{2} (\gamma - \eta) + s' b \cos \frac{1}{2} (\gamma + \eta) - ab \cos \gamma}{ss' \sin \frac{1}{2} (\delta + \eta) - sa \cos \beta + s_1 b \cos \alpha + ab \sin \frac{1}{2} (\delta - \eta)} = \frac{c}{d}$$

und daraus $\left((sa + s'b)\, d \cos \frac{1}{2}\gamma - (ss' + ab)\, c \sin \frac{1}{2}\delta\right) \cos \frac{1}{2}\eta + \left((sa - s'b)\, d \sin \frac{1}{2}\gamma - (ss' - ab)\, c \cos \frac{1}{2}\delta\right) \sin \frac{1}{2}\eta = d\, (ss' + ab \cos \gamma) - sac \cos \beta + s' bc \cos \alpha$ (IV). Diese Gleichung wird vereinfacht, wenn man jetzt $s' - s$ für d einsetzt und beachtet, daß $c \sin \frac{1}{2}\delta = (a - b) \cos \frac{1}{2}\gamma$ und $c \cos \frac{1}{2}\delta = (a + b) \sin \frac{1}{2}\gamma$ ist. Der Coefficient von $\cos \frac{1}{2}\eta$ wird dann $\left((s'^2 - a^2)\, b - (s^2 - b^2)\, a\right) \cos \frac{1}{2}\gamma$, der von $\sin \frac{1}{2}\eta$ wird $-\left((s'^2 - a^2)\, b + (s^2 - b^2)\, a\right)$, die rechte Seite von (IV) wird $(s' - s)\, ss' + s'ab \cos \gamma - sab \cos \gamma - sac \cos \beta + s'bc \cos \alpha = (s' - s)\, ss' + s'b\, (a \cos \gamma + c \cos \alpha) - sa\, (b \cos \gamma + c \cos \beta) = (s' - s)\, ss' + b^2 s' - a^2 s = (s'^2 - a^2)\, s - (s^2 - b^2)\, s'$. Man erhält so die Endgleichung $\left((s'^2 - a^2)\, b - (s^2 - b^2)\, a\right) \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\eta - \left((s'^2 - a^2)\, b + (s^2 - b^2)\, a\right) \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\eta = (s'^2 - a^2)\, s - (s^2 - b^2)\, s'$. Bringt man dieselbe in die Form

$$\left(\frac{b}{a} - \frac{s^2 - b^2}{s'^2 - a^2}\right) \cos \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\eta - \left(\frac{b}{a} + \frac{s^2 - b^2}{s'^2 - a^2}\right) \sin \tfrac{1}{2}\gamma \sin \tfrac{1}{2}\eta = \frac{s'}{a} \left(\frac{s}{s'} - \frac{s^2 - b^2}{s'^2 - a^2}\right),$$

und führt die Hülfswinkel λ, μ, ν durch die Gleichungen $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \lambda$, $\frac{s^2 - b^2}{s'^2 - a^2} = \operatorname{tg} \mu$, $\frac{s}{s'} = \operatorname{tg} \nu$ ein, so entsteht $\sin (\lambda - \mu) \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\eta + \sin (\lambda + \mu) \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}\eta = \frac{s' \sin (\nu - \mu) \cos \lambda}{a \cos \nu}$ (§. 3, 1). Die übrigen Winkel sind aus (I) und (II) zu berechnen. (III) kann zur Controlle dienen.

149. $CZ - AZ = d$, $CZ - BZ = d'$. Aufl. ähnlich wie 148. Man erhält schließlich, $\gamma_1 - \gamma_2 = \eta$ gesetzt, $(a(b^2 - d^2) - b(a^2 - d'^2))$ $\cos {}^1/_2 \gamma \cos {}^1/_2 \eta + (a(b^2 - d^2) + b(a^2 - d'^2) \sin {}^1/_2 \gamma \sin {}^1/_2 \eta$ $= - d(a^2 - d'^2) + d'(b^2 - d^2)$ oder, wenn man $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \lambda$, $\frac{b^2 - d^2}{a^2 - d'^2} = \operatorname{tg} \mu$, $\frac{d}{d'} = \operatorname{tg} \nu$ setzt, $\sin(\mu - \lambda) \cos {}^1/_2 \gamma \cos {}^1/_2 \eta +$ $\sin(\mu + \lambda) \sin {}^1/_2 \gamma \sin {}^1/_2 \eta = \frac{d' \cos \lambda \sin(\mu - \nu)}{a \cos \nu}$ (§. 3, 1).

150. $CZ^2 - AZ^2 = d^2$, $CZ^2 - BZ^2 = d'^2$. Aufl. Fällt man $ZY \perp BC$ und $ZX \perp AC$, so ist $CX^2 - AX^2 = d^2$, mithin $CX - AX = \frac{d^2}{b}$, und $CX = \frac{b^2 + d^2}{2b}$, ebenso $CY = \frac{a^2 + d'^2}{2a}$, folglich $\frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2} = \frac{CX}{CY} = \frac{(b^2 + d^2) a}{(a^2 + d'^2) b}$ (§. 7, 5).

151. $CZ^2 + AZ^2 = s^2$, $CZ^2 + BZ^2 = s'^2$. Aufl. Ist D die Mitte von BC, E die von AC, so kann man DZ und EZ berechnen, z. B. $EZ = \sqrt{{}^1/_2 s^2 - {}^1/_4 b^2}$. Dann kann man $\triangle$ DEZ berechnen ($DE = {}^1/_2 c$), findet dadurch $\angle$ DEZ und EDZ, kann dann γ_1 und γ_2 aus $\triangle$ CEZ und $\triangle$ CDZ berechnen.

§. 39.

Aufgaben über den Kreis.

Gegeben Kreise, Linien und Punkte, gesucht Linien und Punkte.

1. Von P an K eine Tangente zu ziehen. Bekannt $PK = c$ und r, gesucht $\angle KPA = \psi$, wenn A der Berührungspunkt ist. Aufl. $\sin \psi = \frac{r}{c}$.

2. Von P aus eine Linie zu ziehen, die K unter der Sehne s schneidet. Bekannt $PK = c$, r, s, gesucht der Winkel ψ, den die Linie mit PK bildet. Aufl. $\sin \psi = \frac{\sqrt{4 r^2 - s^2}}{2c}$.

3. Von P aus eine Linie zu ziehen, die K unter einer Sehne mit dem Peripheriewinkel α schneidet. Bekannt $PK = c$, r, α, gesucht der Winkel ψ, den die Linie mit PK bildet. Aufl. $\sin \psi = \frac{r \cos \alpha}{c}$.

a) Gegeben ist $L \parallel L'$, P auf L, P' auf L', und K (hier zwischen L und L'). An K soll eine Tangente XX' (X auf L, X' auf L')

so gezogen werden, daß sie noch außerdem eine Bedingung erfüllt. Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß XX′ zwischen PP′ und K liegt. Bekannt sind die von K resp. auf L und L′ gefällten Senkrechten KA = a, KA′ = a′, PA = c, P′A′ = c′ und r, gesucht $\angle$ AKZ = φ, wenn Z den Berührungspunkt von XX′ mit K bezeichnet. Es ist $AX = \frac{r - a\cos\varphi}{\sin\varphi}$, $A'X' = \frac{r + a'\cos\varphi}{\sin\varphi}$,

$PX = \frac{c\sin\varphi + a\cos\varphi - r}{\sin\varphi}$, $P'X' = \frac{c'\sin\varphi - a'\cos\varphi - r}{\sin\varphi}$.

Unter den angegebenen Bedingungen die Tangente an K so zu ziehen, daß

4. XX′ = b. Aufl. $\sin\varphi = \frac{a + a'}{b}$.
5. PX + P′X′ = s (§. 3, 1).
6. PX − P′X′ = d. Aufl. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a + a'}{c - c' - d}$.
7. PX : P′X′ = m : n (§. 3, 1).
8. PX = XX′ (§. 3, 1).
9. PX : XX′ = m : n (§. 3, 1).
10. PX + P′X′ = XX′ (§. 3, 1).
11. PX − P′X′ = XX′ (§. 3, 1).
12. AX = P′X′ (§. 3, 1).
13. AX + A′X′ = PX + P′X′ (§. 3, 1).
14. PX + P′X′ + XX′ = s (§. 3, 1).
15. Trapez PXX′P′ : Trapez AXX′A′ = m : n.

b) Gegeben L || L′ und K (hier zwischen L und L′). An K soll eine Tangente XX′ (X auf L, X′ auf L′, Berührungspunkt Z) so gezogen werden, daß sie noch einer Bedingung genügt. Bekannt sind die von K respective auf L und L′ gefällten Senkrechten KA = a, KA′ = a′ und r, gesucht $\angle$ A′KZ = φ. Es ist $XZ = \frac{a + r\cos\varphi}{\sin\varphi}$,

$X'Z = \frac{a' - r\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

Unter den angegebenen Bedingungen an K eine Tangente zu ziehen, so daß

16. XZ = X′Z.
17. XZ : X′Z = m : n
18. XX′ = b.
19. XZ − X′Z = d (§. 3, 1).
20. XZ . X′Z = q^2.
21. $XZ^2 + X'Z^2 = s^2$.
22. $XZ^2 - X'Z^2 = d^2$.

c) Gegeben ist ein Kreissektor ABK (Mittelpunkt K). Auf dem Bogen AB soll der Punkt Z so bestimmt werden, daß, nachdem ZX ⊥ KA, ZY ⊥ KB gefällt ist, noch einer Bedingung genügt wird. Bekannt ist r, $\angle$ AKB = γ, gesucht $\angle$ AKZ = φ, $\angle$ BKZ = ψ. Es ist KX = $r\cos\varphi$, KY = $r\cos\psi$, XZ = $r\sin\varphi$, YZ = $r\sin\psi$,

$AX = r(1 - \cos\varphi) = 2r \sin \frac{1}{2}\varphi^2$, $BY = r(1 - \cos\psi) = 2r \sin \frac{1}{2}\psi^2$.

Unter den gegebenen Bedingungen Z auf $\widehat{AB}$ so zu bestimmen, daß gegeben

23. XZ : YZ = m : n (§. 7, 1)
24. KX : KY = m : n (§. 7, 5)
25. AX : BY = m : n (§. 7, 1)
26. KX : YZ = m : n (§. 7, 3)
27. KX = BY (§. 4, 5)
28. KX : BY = m : n (§. 3, 5)
29. AX = YZ (§. 4, 9)
30. KX + KY (§. 4, 5)
31. KX — KY (§. 4, 7)
32. XZ + YZ (§. 4, 1)
33. XZ — YZ (§. 4, 2).
34. XZ + YZ = AX + BY. Aufl. $\sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi) + \sin(\frac{1}{4}\pi + \psi) = \sqrt{2}$ (§. 4, 1).
35. KX + KY = AX + BY (§. 4, 5).
36. KX + KY + XZ + YZ = s. Aufl. $\sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi) + \sin(\frac{1}{4}\pi + \psi) = \frac{s}{r\sqrt{2}}$ (§. 4, 1).
37. XZ . YZ (§. 6, 1).
38. KX . KY (§. 6, 5).
39. AX . BY (§. 6, 1).
40. KX . KY = AX . BY (§. 4, 5).
41. XZ . YZ : AX . BY = m : n (§. 6, 7).
42. KX . KY : XZ . YZ = m : n (§. 6, 11).
43. KX — AX = KY — BY (§. 3, 5).
44. △ KXZ : △ KYZ = m : n (§. 7, 1).
45. Inhalt von Viereck KXZY.

d) Gegeben ist ein Sektor ABK (Mittelpunkt K). An Bogen AB eine Tangente (Berührungspunkt Z) so zu ziehen, daß, nachdem man auf dieselbe die Senkrechten AX und BY gefällt, noch einer Bedingung genügt werde. Bekannt ist r und $\angle AKB = \gamma$, gesucht $\angle AKZ = \varphi$, $BKZ = \psi$. Es ist $AX = r - r\cos\varphi = 2r \sin \frac{1}{2}\varphi^2$, $BY = r - r\cos\psi = 2r \sin \frac{1}{2}\psi^2$, $XZ = r \sin\varphi$, $YZ = r \sin\psi$.

Unter den gegebenen Bedingungen an AB eine Tangente zu ziehen, wenn gegeben

46. AX : BY = m : n (§. 7, 1)
47. XZ : YZ = m : n (§. 7, 1)
48. AX = YZ (§. 4, 9)
49. AX : YZ = m : n (§. 3, 1)
50. AX + BY (§. 4, 5)
51. AX — BY (§. 4, 7)
52. XZ + YZ (§. 4, 1)
53. XZ — YZ (§. 4, 3).
54. AX + BY = XZ + YZ. Aufl. $\sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi) + \sin(\frac{1}{4}\pi + \psi) = \sqrt{2}$ (§. 4, 1).
55. AX — BY = XZ — YZ.
56. AX + BY : XZ + YZ = m : n. Aufl. $m \sin\varphi + n \cos\varphi + m \sin\psi + n \cos\psi = 2n$. Nach Einführung des Hülfs-

winkels $\operatorname{tg} \varkappa = \frac{n}{m}$ entsteht hieraus $\sin(\varphi + \varkappa) + \sin(\psi + \varkappa) = 2 \sin \varkappa$ (§. 4, 1).

57. XZ . YZ (§. 6, 1).
58. AX . BY (§. 6, 1).
59. AX . BY : XZ . YZ = m : n
60. $\triangle$ AXZ : $\triangle$ BYZ = m : n (§. 7, 1).
61. $\triangle$ AXZ + $\triangle$ BYZ (§. 3, 3).

e) Gegeben ist K und ein Winkel C, dessen Schenkel K in A und B berühren. Es soll auf dem Bogen AB (hier dem kleineren) ein Punkt Z bestimmt werden, so daß, nachdem ZX $\perp$ CA, ZY $\perp$ CB gefällt ist, noch eine Bedingung erfüllt wird. Bekannt ist r, $\angle$ ACB $= \gamma$; aus denselben leicht zu berechnen AC = BC = r cot $\frac{1}{2}\gamma$ = c; gesucht $\angle$ AKZ $= \varphi$, $\angle$ BKZ $= \psi$, deren Summe $\pi - \gamma$ ist. Es ist AX = r $\sin\varphi$, BY = r $\sin\psi$, XZ = r − r $\cos\varphi$ = 2 r $\sin \frac{1}{2}\varphi^2$, YZ = r − r $\cos\psi$ = 2 r $\sin \frac{1}{2}\psi^2$, CX = c − r $\sin\varphi$, CY = c − r $\sin\psi$.

Unter den angegebenen Bedingungen den Punkt Z auf $\widehat{AB}$ zu bestimmen, wenn gegeben

62. XZ : YZ = m : n (§. 7, 1)
63. AX : BY = m : n (§. 7, 1)
64. CX : CY = m : n (§. 3, 3)
65. XZ = BY (§. 4, 9)
66. XZ = CY (§. 4, 11)
67. AX = CY (§. 4, 1)
68. AX : CY = m : n (§. 3, 3)
69. XZ + YZ (§. 4, 5)
70. XZ − YZ (§. 4, 7)
71. AX + BY (§. 4, 1)
72. AX − BY (§. 4, 3)
73. AX . BY (§. 6, 1)
74. XZ . YZ (§. 6, 1).
75. AX + BY = XZ + YZ. Aufl. $\sin(\varphi + \frac{1}{4}\pi) + \sin(\psi + \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$.
76. AX − BY = XZ − YZ.
77. AX + BY : XZ + YZ = m : n (56).
78. AX . BY : XZ . YZ = m : n (§. 6, 7).

f) Gegeben ist K und L. Auf L einen Punkt X so zu bestimmen, daß, nachdem an K die Tangenten XB und XC gezogen sind, die Winkel bei X noch eine Bedingung erfüllen. Bekannt ist r, die von K auf L gefällte Senkrechte KA = a, gesucht sind, wenn nicht etwa durch die Bedingung der Aufgabe selbst gegeben, $\angle$ AXB $= \varphi$, $\angle$ BXC $= \psi$.

Es ist $XK = \frac{r}{\sin \frac{1}{2}\psi} = \frac{a}{\sin(\varphi + \frac{1}{2}\psi)}$.

Unter den angegebenen Bedingungen X auf L zu bestimmen, wenn gegeben

79. φ. Aufl. $\frac{\sin(\varphi + \frac{1}{2}\psi)}{\sin \frac{1}{2}\psi} = \frac{a}{r}$ (§. 7, 2).
80. ψ.

81. $\psi = \varphi$. Aufl. $\cos\psi = \frac{a - r}{2r}$. 82. $\psi = 2\varphi$.

83. $\psi = 3\varphi$. Aufl. $\frac{\sin {}^5/_2 \varphi}{\sin {}^3/_2 \varphi} = \frac{a}{r}$, daraus $\cos\varphi^2 - \frac{a - r}{2r} \cos\varphi - \frac{a + r}{4r} = 0$.

84. $\psi = 4\varphi$. Aufl. $\frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{a}{r}$, daraus $\cos\varphi^2 - \frac{a}{2r} \cos\varphi - {}^1/_4 = 0$.

85. $\psi = {}^1/_2 \varphi$. Aufl. $\frac{\sin {}^5/_2 \psi}{\sin {}^1/_2 \psi} = \frac{a}{r}$, daraus $\cos\psi^2 + {}^1/_2 \cos\psi - \frac{r + a}{4r} = 0$.

g) Gegeben ist K, P und P'. An K eine Tangente (Berührungspunkt Y) so zu ziehen, daß, wenn auf dieselbe die Senkrechten PX und P'X' gefällt werden, noch eine Bedingung erfüllt wird. Wir beschränken uns auf den Fall, daß K, P, P' auf derselben Seite der Tangente liegen. Bekannt ist r, KP = a, KP' = a', $\angle$ PKP' = γ. Zieht man noch durch K zu XX' die Parallele ZZ', so kann man die Winkel PKZ = φ und P'KZ' = φ' als gesuchte Stücke betrachten; ihre Summe ist je nach der verschiedenen Lage von P und P' zum Kreise $\pi - \gamma$ oder γ. Es ist XY = a $\cos\varphi$, X'Y = a' $\cos\varphi'$, PX = r + a $\sin\varphi$, P'X' = r + a' $\sin\varphi'$.

Unter den angegebenen Bedingungen an K eine Tangente zu ziehen, wenn gegeben

86. XY = X'Y (§. 7, 5). 87. PX = P'X' (§. 7, 1).
88. XY = P'X'. Aufl. $a\cos\varphi - a'(\cos {}^1/_2\pi - \varphi') = r$ (§. 3, 5).
89. XY : X'Y = m : n (§. 7, 5). 93. PX — P'X' (§. 3, 3).
90. PX : P'X' = m : n (§. 3, 3). 94. XX' (§. 3, 5).
91. XY : P'X' = m : n (88), (§. 3, 3) 95. XY — X'Y (§. 3, 5).
92. PX + P'X' (§. 3, 3).
96. PX + P'X' = XX'. Aufl. $a(\cos\varphi - \sin\varphi) + a'(\cos\varphi' - \sin\varphi') = 2r$, oder $a \sin({}^1/_4\pi - \varphi) + a' \sin({}^1/_4\pi - \varphi') = r\sqrt{2}$ (§. 3, 3).
97. XY . X'Y (§. 6, 5).

h) Gegeben ist K und ein Winkel C = γ, dessen Schenkel K in A und B berühren. An K eine Tangente (Berührungspunkt Z), welche CA in X, CB in Y schneidet, so zu ziehen, daß

98. XZ : YZ = m : n. Aufl. $\angle$ AKZ = φ, $\angle$ BKZ = ψ gesetzt, ist XZ = r tg ${}^1/_2\varphi$, YZ = r tg ${}^1/_2\psi$ (§. 6, 9).

99. XZ . YZ = q^2. Aufl. wie 98. $\operatorname{tg} {}^1/_2\varphi \operatorname{tg} {}^1/_2\psi = \frac{q^2}{r^2}$ (§. 6, 7).

i) Gegeben ist ein Winkel C und K zwischen seinen Schenkeln. Auf der Peripherie von K einen Punkt Z so zu bestimmen, daß, wenn man auf die Schenkel die Senkrechten ZX und ZY fällt, noch eine Bedingung erfüllt wird. Bekannt ist r, CK $=$ c, $\angle$ KCX $= \alpha$, $\angle$ KCY $= \beta$. Fällt man auf die Schenkel noch die Senkrechten KA und KB (X liegt auf CA), so sind CA $=$ a, CB $=$ b, KA $=$ a′, KB $=$ b′ leicht zu berechnen. Als gesuchte Stücke empfiehlt es sich, nicht die Winkel ACZ und BCZ hinzustellen, sondern $\angle$ AKZ $= \varphi$ und $\angle$ BKZ $= \psi$, weil sich sämmtliche Stücke der Figur durch diese Winkel am einfachsten ausdrücken lassen und nach Berechnung derselben alles Uebrige leicht gefunden wird. Es ist CX $= a - r \sin\varphi$, CY $= b - r \sin\psi$, XZ $= a' - r\cos\varphi$, YZ $= b' - r\cos\psi$.

Unter den angegebenen Bedingungen Z auf der Peripherie von K zu bestimmen, wenn gegeben

100. CX $=$ CY (§. 4, 3).

101. XZ $=$ YZ (§. 4, 7).

102. CX : CY $=$ m : n (§. 3, 3).

103. XZ : YZ $=$ m : n (§. 3, 5).

104. CX $+$ CY (§. 4, 1).

105. CX $-$ CY (§. 4, 3).

106. XZ $+$ YZ (§. 4, 5).

107. XZ $-$ YZ (§. 4, 7).

108. CX $+$ CY $+$ XZ $+$ YZ $=$ s. Aufl. $\sin(\frac{1}{4}\pi + \varphi) + \sin(\frac{1}{4}\pi + \psi) = \frac{a + b + a' + b' - s}{r}$ (§. 4, 1).

109. CX : XA $=$ YB : CY (§. 3, 3).

k) Gegeben K und ein Durchmesser AB. Durch B eine Linie, welche die Peripherie von K in Y und eine in A errichtete Tangente in X trifft, so zu ziehen, daß

110. XY $=$ a. Aufl. $\angle$ ABY $= \varphi$ gesetzt, ist $\cos\varphi^2 + \frac{a}{2r}\cos\varphi - 1 = 0$.

111. BY : XY $=$ m : n. Aufl. $\cot\varphi = \sqrt{\frac{m}{n}}$.

l) Gegeben ist K und ein Durchmesser AB. X auf der Peripherie von K so zu bestimmen, daß, wenn man auf eine in A errichtete Tangente die Senkrechte XY fällt, eine Bedingung erfüllt wird. $\angle$ ABX $= \varphi$ gesetzt, ist BX $= 2r\cos\varphi$, AY $= 2r\sin\varphi\cos\varphi = r\sin 2\varphi$, XY $= 2r\sin\varphi^2$.

Unter den angegebenen Bedingungen X auf der Peripherie von K so zu bestimmen, daß

112. BX $=$ XY. Aufl. $\cos\varphi^2 + \cos\varphi - 1 = 0$.

113. BX : XY $=$ m : n. Aufl. $m\cos\varphi^2 + n\cos\varphi - m = 0$.

114. BX $+$ XY $=$ s. Aufl. $\cos\varphi^2 - \cos\varphi + \frac{s - 2r}{2r} = 0$.

115. $BX - XY = d$. Aufl. $\cos\varphi^2 + \cos\varphi - \frac{d + 2r}{2r} = 0$.

m) Gegeben ist K und P innerhalb K. Durch P eine Sehne XY zu ziehen, welche noch eine Bedingung erfüllen soll. Bekannt ist r und $KP = e$, gesucht, wenn Z die Mitte von XY bezeichnet, $\angle XKZ = \psi$ und $\angle PKZ = \varphi$. Aus den Dreiecken PKX und PKY findet man mit Hülfe des Sinussatzes $PX = \frac{r \sin(\psi + \varphi)}{\cos\varphi} = \frac{e \sin(\psi + \varphi)}{\cos\psi}$ und $PY = \frac{r \sin(\psi - \varphi)}{\cos\varphi} = \frac{e \sin(\psi - \varphi)}{\cos\psi}$. Die jedesmalige in der Aufgabe gestellte Bedingung liefert eine Gleichung zwischen ψ und φ, die andere ist für alle Fälle $r \cos\psi = e \cos\varphi$. Für die Aufgaben, in denen $\widehat{AX}$ ein Vielfaches von $\widehat{BY}$ werden soll (AB ist ein Durchmesser durch P, P zwischen K und B), ist zu beachten, daß $\angle AKX = \pi - (\psi + \varphi)$ und $\angle BKY = \psi - \varphi$ ist. Soll nun $\widehat{AX} = n \,.\, \widehat{BY}$ werden, so muß $\psi + \varphi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\psi - \varphi)$, oder wenn $\frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \vartheta$ gesetzt wird, $\psi + \varphi = \frac{1}{2}\pi - n\vartheta$ werden. Aus der Gleichung $r \cos\psi = e \cos\varphi$ folgt ferner $\frac{r + e}{r - e} = \cot \frac{1}{2}(\psi + \varphi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \varphi)$, und nach Einsetzung der letzten Werthe $\frac{\operatorname{tg} n\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{r + e}{r - e}$.

Durch P in K die Sehne XY so zu ziehen, daß

116. $PX + PY = s$. Aufl. $\sin\psi = \frac{s}{2r}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{4r^2 - s^2}}{2e}$.

117. $PX - PY = d$. Aufl. $\sin\varphi = \frac{d}{2e}$, $\cos\psi = \frac{\sqrt{4e^2 - d^2}}{2r}$.

118. $PX : PY = m : n$. Aufl. $\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{e}{r}$, $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{(m + n)\, e}{(m - n)\, r}$ (§. 9, 3).

119. $\widehat{AX} = 2\,\widehat{BY}$. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{3e - r}{e + r}}$. 2. Aufl. $\cos 2\vartheta = \frac{r - e}{2e}$.

120. $\widehat{AX} = 3\,\widehat{BY}$. 1. Aufl. $\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{2e - r}{2e + r}}$. 2. Aufl. $\cos 2\vartheta = \frac{r}{2e}$.

121. $\widehat{AX} = 4\,\widehat{BY}$. 1. Aufl. $(r + e)\operatorname{tg}\vartheta^4 - 2(r + 5e)\operatorname{tg}\vartheta^2 - 3r + 5e = 0$. 2. Aufl. $4e \cos 2\vartheta^2 - 2(r - e)\cos 2\vartheta - (r + e) = 0$.

122. $\overset{\frown}{AX} = 5\,\overset{\frown}{BY}$. 1. Aufl. $(2r + 3e)\,tg\,\vartheta^4 - 10e\,tg\,\vartheta^2 - 2r + 3e = 0$. 2. Aufl. $4e\cos 2\vartheta^2 - 2r\cos 2\vartheta - e = 0$.

123. $2\,\overset{\frown}{AX} = 3\,\overset{\frown}{BY}$. 1. Aufl. $(r - e)\,tg\,{}^1\!/_2\vartheta^4 + 2(r + 5e)\,tg\,{}^1\!/_2\vartheta^2 + r - 5e = 0$. 2. Aufl. $2(r - e)\cos\vartheta^2 - (r + 3e)\cos\vartheta + (r + e) = 0$.

124. $AX : BY = m : n$. Aufl. $\frac{\cos {}^1\!/_2 (\psi + \varphi)}{\sin {}^1\!/_2 (\psi - \varphi)} = \frac{m}{n}$, $\frac{\sin {}^1\!/_2 (\psi + \varphi)}{\cos {}^1\!/_2 (\psi - \varphi)} = \frac{m\,(r - e)}{n\,(r + e)}$ (§. 9, 4).

125. Gegeben K, eine Sehne AB und P auf AB. Durch P eine Sehne XY so zu ziehen, daß, wenn auf AB die Senkrechten XX′ und YY′ gefällt werden, XX′ − YY′ = d wird. Aufl. Bezeichnet man die Mitte von AB mit C, die von XY mit Z, so ist bekannt r, $\angle AKB = 2\alpha$, KP = e, ferner leicht zu finden $\angle PKC = \gamma$, gesucht ist $\angle PKZ = \varphi$ und $XKZ = \psi$, zwischen denen die Gleichung $e\cos\varphi = r\cos\psi$ besteht. Es ist $XX' = r\cos\alpha - r\cos(\gamma + \varphi + \psi)$ und $YY' = -r\cos\alpha + r\cos(\gamma + \varphi - \psi)$, daher $e\cos\varphi\cos(\gamma + \varphi) = r\cos\alpha - {}^1\!/_2 d$ (§. 6, 6).

126. Gegeben K, eine Sehne AB und P auf der Peripherie von K. Durch P eine Sehne PX, welche AB in Y schneidet, so zu ziehen, daß PY : YX = m : n. Aufl. Bekannt ist $\angle AKB = 2\alpha$, $\angle AKP = \beta$, leicht zu finden die von P auf AB gefällte Senkrechte $PQ = r\cos\alpha - r\cos(\beta + \alpha) = 2r\sin({}^1\!/_2\beta + \alpha)\sin{}^1\!/_2\beta$. Gesucht ist $\angle PKX = 2\varphi$. Es ist $PY = -\frac{PQ}{\sin(\beta + \alpha + \varphi)}$, $PX = 2r\sin\varphi$, daher $\sin\varphi\sin(\beta + \alpha + \varphi) = -\frac{(m + n)\,PQ}{2mr}$ $= \frac{(m + n)\sin({}^1\!/_2\beta + \alpha)\sin{}^1\!/_2\beta}{m}$ (§. 6, 2).

127. Gegeben K, eine Sehne AB und P innerhalb K. Durch P eine Sehne XY so zu ziehen, daß, wenn auf AB die Senkrechten XX′ und YY′ gefällt werden, XX′ + YY′ = s wird. Aufl. Bekannt ist r, $\angle AKB = 2\alpha$, $\angle BKP = \beta$, KP = e, gesucht $\angle XKY = 2\psi$ und, wenn Z die Mitte von XY bezeichnet, $\angle PKZ = \varphi$. Es ist $XX' = r\cos\alpha - r\cos(\alpha + \beta + \varphi + \psi)$ und $YY' = r\cos\alpha - r\cos(\alpha + \beta + \varphi - \psi)$, daher, wenn man die Gleichung $r\cos\psi = e\cos\varphi$ zu Hülfe nimmt, $\cos(\alpha + \beta + \varphi)\cos\varphi = \frac{2r\cos\alpha - s}{2e}$.

n) Für die Aufgaben 128 bis 140 beachte man Folgendes. Im Kreise K schneiden sich zwei Sehnen AB und XY, deren Mittelpunkte C und W sind, in Z unter dem Winkel ψ, so daß $\angle$ CKW $= \psi$. KW schneide AB in V. Ferner werde $\angle$ AKB mit 2α, $\angle$ XKY mit 2φ bezeichnet. Dann ist $CV = CK \operatorname{tg}\psi = r \cos\alpha \operatorname{tg}\psi$, $KV = \frac{CK}{\cos\psi} = \frac{r\cos\alpha}{\cos\psi}$, $VW = KW - KV = r\frac{\cos\varphi\cos\psi - \cos\alpha}{\cos\psi}$, $VZ = \frac{VW}{\sin\psi} = r\frac{\cos\varphi\cos\varphi - \cos\alpha}{\cos\psi\sin\psi}$, $AZ = AC + CV + VZ$ $= r\frac{\sin\alpha\cos\psi\sin\psi + \cos\alpha\sin\psi^2 + \cos\varphi\cos\psi - \cos\alpha}{\cos\psi\sin\psi} =$ $r\frac{\sin\alpha\sin\psi - \cos\alpha\cos\psi + \cos\varphi}{\sin\psi} = r\frac{\cos\varphi - \cos(\alpha+\psi)}{\sin\psi}$, ebenso $BZ = r\frac{\cos(\alpha-\psi) - \cos\varphi}{\sin\psi}$, $XZ = r\frac{\cos\alpha - \cos(\varphi+\psi)}{\sin\psi}$, $YZ = r\frac{\cos(\varphi-\psi) - \cos\alpha}{\sin\psi}$, $KZ^2 = KW^2 + WZ^2 =$ $r^2\frac{\cos\varphi^2 - 2\cos\varphi\cos\alpha\cos\psi + \cos\alpha^2}{\sin\psi^2}$. In den Aufgaben 132 bis 140 tritt an die Stelle von A, B, C, α bezüglich X′, Y′, W′, φ', ebenso in 128 bis 131 β an die Stelle von ψ, in 136 bis 140 P an die Stelle von Z. In 132 bis 135 ist KP $= e$ bekannt, und $\angle$ PKW′ $= \vartheta$ wird nach der Berechnung von φ' gefunden aus $\cos\vartheta = \frac{r\cos\varphi'}{e}$.

Gegeben ist K und eine Sehne AB. Eine andere Sehne XY so zu ziehen, daß sie AB unter dem Winkel β schneidet (Durchschnittspunkt Z) und

128. XY $= a$. Aufl. φ zu finden.

129. YZ $-$ XZ $= d$. Aufl. $\cos\varphi = \frac{d \operatorname{tg}\beta}{2r} + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.

130. XZ : YZ $= m : n$. Aufl. $(m+n)\cos\beta\cos\varphi + (m-n)\sin\beta\sin\varphi = (m+n)\cos\alpha$ (§. 3, 1).

131. Gegeben K und eine Sehne AB. Eine Sehne XY, welche AB in Z schneidet, so zu ziehen, daß XZ $= b$, YZ $= c$ wird. Aufl. $\sin\varphi = \frac{b+c}{2r}$, $2r\cos\varphi\cos\psi - (c-b)\sin\psi = 2r\cos\alpha$ (§. 3, 1).

132. Gegeben K und P. Zwei Sehnen XY und X′Y′, welche sich in Z unter dem gegebenen Winkel β schneiden, so zu ziehen, daß X′Y′ durch P geht, XZ $=$ YZ und X′Z : Y′Z $= m : n$ wird. Aufl. $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{(m+n)\operatorname{tg}\beta}{m-n}$, $\cos\varphi = \frac{\cos\varphi'}{\cos\beta}$.

133. Gegeben K und P. Zwei (in Z) sich senkrecht schneidende Sehnen XY und X'Y' so zu ziehen, daß X'Y' durch P geht, XZ : YZ = m : n, X'Z : Y'Z = m' : n' wird. Aufl. $\psi = \frac{1}{2}\pi$ zu setzen. $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m - n}{m + n}$, $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{m' + n'}{m' - n'}$ (§. 9, 4).

134. Gegeben K und P. Zwei Sehnen XY und X'Y', welche sich (in Z) unter dem gegebenen Winkel β schneiden, so zu ziehen, daß X'Y' durch P geht, XZ — YZ = d, X'Z — Y'Z = d' wird. Aufl. $\cos\varphi = \frac{d' + d\cos\beta}{2r\sin\beta}$, $\cos\varphi' = \frac{d + d'\cos\beta}{2r\sin\beta}$. (Man beachte noch die speciellen Fälle $\beta = \frac{1}{2}\pi$ und d = d').

135. Gegeben K und P. Zwei sich in Z schneidende Sehnen XY und X'Y' so zu ziehen, daß X'Y' durch P geht, X'Z — Y'Z = d, XZ = b, YZ = c wird. Aufl. $\sin\varphi = \frac{b + c}{2r}$, $2r\cos\varphi\sin\psi - (b - c)\cos\psi = d$ (§. 3, 1).

136. Gegeben K und P innerhalb K. Durch P zwei gleiche Sehnen XY und X'Y' zu ziehen, welche sich unter dem gegebenen Winkel β schneiden. Aufl. $\varphi = \varphi'$, $\cos\varphi = \frac{e\cos\frac{1}{2}\beta}{r}$.

Gegeben K und P innerhalb K. Durch P zwei aufeinander senkrechte Sehnen XY und X'Y' so zu ziehen, daß

137. XY : X'Y' = m : n. Aufl. $\sin\varphi^2 = \frac{(2r^2 - e^2)m^2}{r^2(m^2 + n^2)}$.

138. XY + X'Y' = s. Aufl. $\sin\varphi^2 + \sin\varphi'^2 = \frac{2r^2 - e^2}{r^2}$, $\sin\varphi + \sin\varphi' = \frac{s}{2r}$.

139. XY — X'Y' = d (138). 140. XY . X'Y' = p^2 (138).

141. Gegeben ist K und eine Sehne AB. Eine Sehne XY ‖ AB so zu ziehen, daß sie durch KA und KB in drei gleiche Theile getheilt wird. Aufl. Bekannt r, ∠ AKB = 2α, gesucht ∠ XKY = 2φ. Es ist $\operatorname{tg}\varphi = 3\operatorname{tg}\alpha$.

142. Gegeben ist K und eine Sehne AB. Eine Sehne XY ‖ AB, welche KA in Z und KB in V schneidet, so zu ziehen, daß XZ : ZV = m : n. Aufl. Aehnlich wie 141 ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{(2m + n)\operatorname{tg}\alpha}{n}$.

o) Gegeben K, P und P'. Durch P soll eine Sehne XY, durch P' eine Sehne X'Y' gezogen werden, so daß sie beide noch eine Bedingung erfüllen. Bekannt ist r, KP = e, KP' = e', ∠ PKP' = γ, gesucht ∠ XKY = 2φ, X'KY' = $2\varphi'$, ferner, wenn Z und Z'

die Mitten von XY und X'Y' sind, $\angle$ PKZ $= \psi$, P'KZ' $= \psi'$. Zu beachten ist $XY = 2\,r \sin\varphi$, $X'Y' = 2\,r \sin\varphi'$, $r \cos\varphi = e \cos\psi$, $r \cos\varphi' = e' \cos\psi'$.

Durch P und P' in K die Sehnen XY und X'Y' so zu ziehen, daß sie

143. gleich und parallel sind. Aufl. $\frac{\cos\psi}{\cos\psi'} = \frac{e'}{e}$, $\psi + \psi' = \pi - \gamma$ (§. 7, 5).

144. parallel werden und daß XY : X'Y' $=$ m : n. Aufl. Aus $\sin\varphi : \sin\varphi' = m : n$ folgt $(r^2 - r^2 \cos\varphi^2)\,n^2 = (r^2 - r^2 \cos\varphi'^2)\,m^2$, daher, wenn man obige Gleichungen für $r \cos\varphi$ und $r \cos\varphi'$ benutzt, $e^2 n^2 \cos\psi^2 - e'^2 m^2 \cos\psi'^2 = - r^2 (m^2 - n^2)$ oder $e'^2 m^2 \cos 2\,\psi' - e^2 n^2 \cos 2\,\psi = 2\,r^2 (m^2 - n^2) - e'^2 m^2 + e^2 n^2$ (§. 3, 5).

145. sie sich unter dem gegebenen Winkel β schneiden und XY $=$ X'Y'. Aufl. wie 143, nur $\psi + \psi' = \pi - \beta - \gamma$.

146. sie sich unter dem gegebenen Winkel β schneiden und XY : X'Y' $=$ m : n. Aufl. ähnlich wie 144.

147. Gegeben K und auf einem Durchmesser P und P' zu verschiedenen Seiten von K (also K zwischen P und P'). Durch P und P' zwei gleiche Sehnen zu ziehen, die sich auf der Peripherie schneiden. Aufl. Bekannt ist r, KP $=$ e, KP' $=$ e', gesucht, wenn man die verlangten Sehnen mit XY und XY', ihre Mitten mit Z und Z' bezeichnet, $\angle$ XKY $= \angle$ XKY' $= 2\,\varphi$, $\angle$ PKZ $= \psi$, $\angle$ P'KZ' $= \psi'$. Es ist $r \cos\varphi = e \cos\psi = e' \cos\psi'$ oder $\cos\psi = \frac{r \cos\varphi}{e}$, $\cos\psi' = \frac{r \cos\varphi}{e'}$. Die Addition und Subtraction beider Gleichungen liefert, wenn man berücksichtigt, daß $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\psi + \psi')$ ist, $2 \cos \frac{1}{2}(\psi + \psi') \cos \frac{1}{2}(\psi' - \psi) = \frac{(e' + e)\, r \cos\varphi}{ee'} = \frac{(e + e')\, r \sin \frac{1}{2}(\psi + \psi')}{ee'}$ und $2 \sin \frac{1}{2}(\psi + \psi') \sin \frac{1}{2}(\psi' - \psi) = \frac{(e' - e)\, r \cos\varphi}{ee'} = \frac{(e' - e)\, r \sin \frac{1}{2}(\psi + \psi')}{ee'}$. Aus der letzten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich $\sin \frac{1}{2}(\psi' - \psi) = \frac{(e' - e)\, r}{2\,ee'}$, aus der ersten $\cot \frac{1}{2}(\psi + \psi') = \frac{(e' + e)\, r}{2\,ee' \cos \frac{1}{2}(\psi' - \psi)}$.

p) In den Aufgaben 148 bis 153 sind zwei Kreise K und K' gegeben und es soll eine Linie gefunden werden, die zu beiden in vorgeschriebener Beziehung steht. Bekannt ist r, r', und KK' $=$ c, gesucht der Winkel φ, den die Richtung der gesuchten Linie mit KK' bildet. Unter dem Winkel, den eine Gerade mit einem Kreise bildet, versteht

man den Winkel, den sie mit der Tangente ihres Durchschnittspunktes (Abschnittswinkel) bildet. Schneidet die Sehne AB den Kreis K unter dem Winkel α, so ist $\angle$ AKB $= 2\alpha$, und mittelst der Gleichung AB $= 2\,r \sin\alpha$ kann man AB finden, wenn r und α gegeben, ebenso α, wenn r und AB gegeben.

Gegeben K und K'. Eine Linie zu bestimmen, welche

148. K und K' berührt. Aufl. (Aeußere Berührung) $\sin\varphi = \frac{r' - r}{c}$.

149. K berührt und K' unter dem gegebenen Winkel α' schneidet. Aufl. $\sin\varphi = \frac{r' \cos\alpha' - r}{c}$.

150. K unter dem Winkel α, K' unter α' schneidet. Aufl. $\sin\varphi = \frac{r' \cos\alpha' - r \cos\alpha}{c}$.

151. K berührt, K' unter der Sehne s' schneidet (149).

152. K unter dem Winkel α, K' unter der Sehne s' schneidet (150).

153. K unter der Sehne s, K' unter s' schneidet (150).

154. Gegeben K und K', welche sich in A berühren, so daß K' von K eingeschlossen wird. Durch A eine Sehne, welche K in Y, K' in Y' schneidet, so zu ziehen, daß YY' $=$ a. Aufl. $\angle$ YAK $= \varphi$ gesetzt, ist $\cos\varphi = \frac{a}{2\,(r - r')}$.

155. Gegeben K und K', welche sich in A berühren, so daß K' von K eingeschlossen wird. Auf KK' eine Senkrechte ZX, welche K in X, K' in X' trifft, so zu ziehen, daß XX' $=$ a. Aufl. Bekannt a, r, r', KK' $=$ c, gesucht $\angle$ XKZ $= \varphi$, $\angle$ X'K'Z $= \varphi'$. Es ist $r \cos\varphi - r \cos\varphi' = c$ und $r \sin\varphi - r \sin\varphi' = a$. Indem man quadrirt und addirt, ergiebt sich $\cos(\varphi - \varphi') = \frac{r^2 + r'^2 - c^2 - a^2}{2\,r\,r'}$.
Man berechne erst $k = \sqrt{c^2 + a^2}$ und bestimme dann $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$.

q) Gegeben K und K', welche sich in A und B schneiden. Durch A soll eine Linie, welche die Peripherieen von K und K' bezüglich in X und X' schneidet, so gezogen werden, daß sie noch eine Bedingung erfüllt. Bekannt ist r, r', KK' $=$ c, $\angle$ KAK' $= \gamma$, $\angle$ AKK' $= \alpha$, $\angle$ AK'K $= \alpha'$, sowie sämmtliche Stücke von $\triangle$ KK'A, gesucht $\angle$ AKX $= \varphi$, $\angle$ AK'X' $= \varphi'$. Es ist AX $= 2\,r \sin\varphi$, AX' $= 2\,r' \sin\varphi'$, BX $= 2\,r \sin$ BAX $= 2\,r \sin(\alpha + \varphi)$, BX' $= 2\,r \sin(\alpha' + \varphi')$. Die jedesmalige Bedingung der Aufgabe liefert durch Einsetzen der betreffenden Werthe eine Gleichung zwischen φ und φ', während außerdem in allen Fällen die Gleichung $\varphi + \varphi' = \gamma$ besteht.

Durch A die Linie XX' (Doppelsehne) so zu ziehen, daß

156. $AX = AX'$ (§. 7, 1) 159. $AX - AX' = d$ (§. 3, 3)
157. $AX : AX' = m : n$ (§. 7, 1) 160. $AX \,.\, AX' = p^2$ (§. 6, 1)
158. $AX + AX' = s$ (§. 3, 3)
161. $AX^2 - AX'^2 = d^2$. Aufl. $2\,r^2 \cos\varphi^2 - 2\,r'^2 \cos\varphi'^2 = 2\,(r^2 - r'^2) - d^2$ (§. 3, 5).
162. $AX^2 + AX'^2 = s^2$ (161) 165. $BX + BX' = s$ (§. 3, 3)
163. $BX = BX'$ (§. 7, 1) 166. $BX - BX' = d$ (§. 3, 3)
164. $BX : BX' = m : n$ (§. 7, 1) 167. $BX \,.\, BX' = p^2$ (§. 6, 1).

r) Gegeben K und K', welche sich in A und B schneiden. Zwei Sehnen AX in K und AX' in K' so zu ziehen, daß $\angle\, XAX' = \beta$ und noch eine Bedingung erfüllt wird. Alles bleibt wie in 156 bis 167, nur daß jetzt zwischen φ und φ' die Gleichung $\varphi + \varphi' = \pi - (\beta - \gamma)$ besteht.

Die Sehnen AX in K und AX' in K' so zu ziehen, daß $\angle\, XAX' = \beta$ und

168. $AX = AX'$ (§. 7, 1) 174. $AX^2 + AX'^2 = s^2$ (162)
169. $AX : AX' = m : n$ (§. 7, 1) 175. $BX = BX'$ (§. 7, 1)
170. $AX + AX' = s$ (§. 3, 3) 176. $BX : BX' = m : n$ (§. 7, 1)
171. $AX - AX' = d$ (§. 3, 3) 177. $BX + BX' = s$ (§. 3, 3)
172. $AX \,.\, AX' = p^2$ (§. 6, 1) 178. $BX - BX' = d$ (§. 3, 3)
173. $AX^2 - AX'^2 = d^2$ (161) 179. $BX \,.\, BX' = p^2$ (§. 6, 1).

s) Gegeben K, K' und P. Durch P eine Linie, welche die Peripherie von K in X und Y, die von K' in X' und Y' schneidet, so zu ziehen, daß XY und X'Y' noch eine Bedingung erfüllen. Bezeichnet man die Mitten von XY und X'Y' mit Z und Z', so ist bekannt r, r', $KK' = c$, $PK = e$, $PK' = e'$, somit auch alle Stücke von $\triangle$ KK'P wie $\angle\, KPK' = \gamma$, gesucht $\angle\, PKZ = \varphi$, $\angle\, PK'Z' = \varphi'$, $\angle\, XKZ = \psi$, $\angle\, X'K'Z' = \psi'$. Es ist $XZ^2 = r^2 - KZ^2 = r^2 - e^2 \cos\varphi^2$, daher $XY^2 = 4\,r^2 - 4\,e^2 \cos\varphi^2$ und $X'Y'^2 = 4\,r'^2 - 4\,e'^2 \cos\varphi'^2$, $r \cos\psi = e \cos\varphi$, $r' \cos\psi' = e' \cos\varphi'$, ferner $\varphi + \varphi' = \gamma$.

Unter den angegebenen Bedingungen eine Linie durch P so zu ziehen, daß

180. $XY = X'Y'$. Aufl. $e^2 \cos\varphi^2 - e'^2 \cos\varphi'^2 = r^2 - r'^2$, daher $e^2 \cos 2\,\varphi - e'^2 \cos 2\,\varphi' = 2\,(r^2 - r'^2) - (e^2 - e'^2)$ (§. 3, 5).
181. $XY : X'Y' = m : n$. Aufl. $n^2 e^2 \cos 2\,\varphi - m^2 e'^2 \cos 2\,\varphi' = (2\,r^2 - e^2)\,n^2 - (2\,r'^2 - e'^2)\,m^2$ (§. 3, 5). Die speciellen Fälle $m : n = r : r'$ und $m : n = e : e'$ zu beachten.
182. $XY^2 + X'Y'^2 = s^2$. Aufl. $2\,e^2 \cos 2\,\varphi - 2\,e'^2 \cos 2\,\varphi' = 4\,(r^2 + r'^2) - 2\,(e^2 + e'^2) - s^2$ (§. 3, 5).
183. $XY^2 - X'Y'^2 = d^2$. Aufl. ähnlich wie 182.

184. sie K und K' unter gleichen Winkeln schneidet, d. h. $\psi = \psi'$.
Aufl. $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{rc'}{r'c}$ (§. 7, 5).

185. sie K und K' unter Winkeln schneiden, deren Summe gegeben, d. h. $\psi + \psi' = \sigma$. Aufl. $\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{c}{r}$, $\frac{\cos\psi'}{\cos\varphi'} = \frac{c'}{r'}$ (§. 9, 9).

186. sie K und K' unter Winkeln schneiden, deren Differenz gegeben, d. h. $\psi - \psi' = \delta$. Aufl. wie 185 (§. 9, 11).

t) Gegeben K, K' und P. Von P nach K die Sehne XY und nach K' die Sehne X'Y' so zu ziehen, daß sie sich unter dem gegebenen Winkel β schneiden (also $XPX' = \beta$) und noch eine Bedingung erfüllen. Alles bleibt, wie in den entsprechenden Aufgaben 180 bis 186, nur daß $\varphi + \varphi' = \pi - \beta + \gamma$ ist.

Von P aus nach K und K' die Sehnen XY und X'Y' so zu ziehen, daß

187. $XY = X'Y'$ (180)
188. $XY : X'Y' = m : n$ (181)
189. $XY^2 + X'Y'^2 = s^2$ (182)
190. $XY^2 - X'Y'^2 = d^2$ (183)
191. $\psi = \psi'$ (184)
192. $\psi + \psi' = \sigma$ (185)
193. $\psi - \psi' = \delta$ (186).

u) Gegeben K, K' und eine gemeinschaftliche äußere Tangente, welche K in A, K' in A' berührt. P auf AA' so zu bestimmen, daß, wenn man an K und K' die Tangenten PB und PB' zieht, die Winkel $APB = \psi$ und $A'PB' = \psi'$ gewisse Bedingungen erfüllen. Bekannt r, r' und $AA' = c$, gesucht ψ und ψ'. Es ist $PA = r \cot \frac{1}{2}\psi$ und $PA' = r' \cot \frac{1}{2}\psi'$, folglich $c = r \cot \frac{1}{2}\psi + r' \cot \frac{1}{2}\psi'$.

P auf AA' so zu bestimmen, daß

194. $\psi = \psi'$.

195. $\psi = 2\psi'$. Aufl. $c \sin\psi' - (r + r')\cos\psi' = r$ (§. 3, 1).

196. $\psi + \psi' = 2\sigma$. Aufl. $c \sin \frac{1}{2}\psi \sin \frac{1}{2}\psi' = r \cos \frac{1}{2}\psi \sin \frac{1}{2}\psi' + r' \sin \frac{1}{2}\psi \cos \frac{1}{2}\psi'$, daher nach Auflösung der Sinus- und Cosinusproducte $(r - r') \sin \frac{1}{2}(\psi - \psi') + c \cos \frac{1}{2}(\psi - \psi') = (r + r') \sin\sigma + c \cos\sigma$ (§. 3, 1 und 2).

197. $\psi - \psi' = 2\delta$ (196).

v) Gegeben K und K' auf derselben Seite von L. Es soll P auf L so bestimmt werden, daß, wenn man an K und K' die Tangenten PB und PB' zieht, die dadurch entstandenen Winkel noch eine Bedingung erfüllen. Bekannt sind die auf L gefällten Senkrechten $KA = a$, $K'A' = a'$, $AA' = c$. K liege innerhalb $\angle APB$, K' innerhalb $\angle A'PB'$. Gesucht wird $\angle APK = \varphi$, $A'PK' = \varphi'$, $BPK = \omega$, $B'PK' = \omega'$, $\angle APB = \psi$, $\angle A'PB' = \psi'$.

P so zu bestimmen, daß

198. $\psi = \psi'$. Aufl. $c = a \cot\varphi + a' \cot\varphi'$, ferner $PK = \frac{a}{\sin\varphi} = \frac{r}{\sin\omega}$, daher $r = \frac{a \sin\omega}{\sin\varphi} = \frac{a \sin(\psi - \varphi)}{\sin\varphi} = a \sin\psi \cot\varphi - a \cos\psi$, ebenso $r' = a \sin\psi \cot\varphi' - a' \cos\psi$. Durch Addition beider Gleichungen ergiebt sich $c \sin\psi - (a + a') \cos\psi = r + r'$ (§. 3, 1), ferner $\frac{\sin\varphi}{\sin\omega} = \frac{a}{r}$, $\frac{\sin\varphi'}{\sin\omega'} = \frac{a'}{r'}$, $\varphi + \omega = \psi$, $\varphi' + \omega' = \psi$ (§. 7, 1).

199. $\omega = \omega'$, oder, wenn man noch an K und K' die anderen Tangenten PC und PC' zieht, $\angle BPC = B'PC'$. Aufl. $\angle PKK' = \vartheta$, $\angle PK'K = \vartheta'$ gesetzt, ist $\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} = \frac{PK'}{PK} = \frac{r'}{r}$ (I) (da $\triangle PBK \backsim PB'K'$). Aus 198 ergiebt sich leicht $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{a r'}{a' r}$ (II). Bezeichnet man ferner den Winkel, den die Verlängerungen von AA' und KK' bilden, mit $\varkappa$, so ist $\operatorname{tg}\varkappa = \frac{a' - a}{c}$ und $\vartheta - \varphi = \varkappa$, $\varphi' - \vartheta' = \varkappa$ (§. 9, 6).

w) Gegeben zwei concentrische Kreise K. Zu L eine Parallele, welche die Peripherien der Kreise nach einander in X, X', Y', Y trifft, so zu ziehen, daß dabei noch eine Bedingung erfüllt wird. Der Mittelpunkt der Sehnen XY und X'Y' sei Z. Bekannt r, r', gesucht $\angle XKZ = \varphi$, $\angle X'KZ = \varphi'$. Es ist $XZ = r \sin\varphi$, $X'Z = r' \sin\varphi'$, $KZ = r \cos\varphi = r' \cos\varphi'$, $XX' = r \sin\varphi - r' \sin\varphi'$, $XY' = r \sin\varphi + r' \sin\varphi'$.

Die fragliche Linie so zu ziehen, daß

200. $XY : X'Y' = m : n$. Aufl. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m r'}{n r}$, $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{r'}{r}$ (§. 9, 3).

201. $XX' = a$. Aufl. $\varphi - \varphi'$ aus $\triangle XKX'$, dann $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{r'}{r}$ (§. 7, 6).

202. $XY' = a$. Aufl. $\varphi + \varphi'$ aus $\triangle XKY'$, φ und φ' wie 201 (§. 7, 5).

203. $\angle XKX' = \alpha$ (§. 7, 6). 204. $\angle XKY' = \alpha$ (§. 7, 5).

x) Gegeben P und zwei concentrische Kreise K. Durch P eine Linie, welche die Peripherien der Kreise nach einander in X, X', Y', Y schneidet, so zu ziehen, daß noch eine Bedingung erfüllt wird. Die Bezeichnungen bleiben wie in 200 bis 204, und auch die Berechnung von φ und φ' ist dieselbe. Gegeben ist außerdem noch $KP = e$, gesucht $\angle PKZ = \psi$. Es ist $\cos\psi = \frac{r \cos\varphi}{e} = \frac{r' \cos\varphi'}{e}$.

Durch P eine Linie so zu ziehen, daß

205. $XY : X'Y' = m : n$ (200). 206. $XX' = a$ (201).

207. $XY' = a$ (202). 208. $\angle XKX' = \alpha$ (203).
209. $\angle XKY' = \alpha$ (204).
210. $PX = PY'$. Aufl. $PX = r \sin\varphi - e \sin\psi$, $PY' = r' \sin\varphi' + e \sin\psi$, daher $r \sin\varphi - r' \sin\varphi' = 2e \sin\psi$, ferner $r \cos\varphi + r' \cos\varphi' = 2e \cos\psi$. Quadrirt und addirt man beide Gleichungen, so ergiebt sich $\cos(\varphi + \varphi') = \frac{4e^2 - r^2 - r'^2}{2rr'}$ oder $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = \sqrt{\frac{(r + r')^2 - 4e^2}{4e^2 - (r - r')^2}}$, dann wie 204.

y) Gegeben K, K' und P zwischen beiden auf der Centrale. Durch P eine Linie zu ziehen, welche K in X, K' in X' (hier die zunächstliegenden Durchschnittspunkte) so schneidet, daß noch eine Bedingung erfüllt wird. Bekannt r, r', $PA = a$, $PA' = a'$, gesucht, wenn KZ und K'Z' auf die Verlängerungen von XX' senkrecht gefällt werden, $\angle XKZ = \varphi$, $\angle X'K'Z' = \varphi'$, $\angle PKZ = PK'Z' = \psi$. Es ist $PX = a \sin\psi - r \sin\varphi$, $PX' = a' \sin\psi - r' \sin\varphi'$, $r \cos\varphi = a \cos\psi$, $r' \cos\varphi' = a' \cos\psi'$.

Durch P die Linie XX' so zu ziehen, daß

211. $PX = PX'$. Aufl. $r \sin\varphi - r' \sin\varphi' = (a - a') \sin\psi$ und $r \cos\varphi - r' \cos\varphi' = (a - a') \cos\psi$. Durch Quadriren und Addiren beider Gleichungen erhält man $\cos(\varphi - \varphi') = \frac{r^2 + r'^2 - (a - a')^2}{2rr'}$, daher $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')^2 = \frac{(a - a')^2 - (r - r')^2}{(r + r')^2 - (a - a')^2}$. Dann findet man φ und φ' aus $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{ar'}{a'r}$ (§. 7, 6) und $\cos\psi = \frac{r \cos\varphi}{a} = \frac{r' \cos\varphi'}{a'}$.

212. $PX : PX' = m : n$. Aufl. $nr \sin\varphi - mr' \sin\varphi' = (na - ma') \sin\psi$, $nr \cos\varphi - mr' \cos\varphi' = (na - ma') \cos\psi$. Durch Quadriren und Addiren beider Gleichungen ergiebt sich

$$\cos(\varphi - \varphi') = \frac{n^2r^2 + m^2r'^2 - (na - ma')^2}{2mnrr'} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi') = \sqrt{\frac{(na - ma')^2 - (nr - mr')^2}{(nr + mr')^2 - (na - ma')^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\big(n(a + r) - m(a' + r')\big)\big(n(a - r) - m(a' - r')\big)}{\big(n(a + r) - m(a' - r')\big)\big(-n(a - r) + m(a' + r')\big)}}.$$

z) Gegeben K, K' und P. Durch P eine Linie, welche K in X und K' in X' schneidet (hier so, daß KK' nicht von XX' geschnitten wird), so zu ziehen, daß PX und PX' noch einer Bedingung genügen. Bekannt ist r, r', $PK = e$, $PK' = e'$, $KK' = c$, daraus die

Winkel von $\triangle$ KK'P zu berechnen, also auch $KPK' = \gamma$. Gesucht wird, wenn man auf die Verlängerungen von XX' die Senkrechten KZ und K'Z' fällt, $\angle XKZ = \varphi$, $\angle X'K'Z' = \varphi'$, $\angle PKZ = \psi$, $\angle PK'Z' = \psi'$, wobei $\psi + \psi' = \gamma$. Es ist $PX = e \sin\psi - r \sin\varphi$, $PX' = e' \sin\psi' - r' \sin\varphi'$, $r \cos\varphi = e \cos\psi$, $r' \cos\varphi' = e' \cos\psi'$.

Eine Linie durch P so zu ziehen, daß

213. $PX = PX'$. Aufl. $r \sin\varphi - r' \sin\varphi' = e \sin\psi - e' \sin\psi'$ und $r \cos\varphi + r' \cos\varphi' = e \sin\psi + e' \sin\psi'$. Quadrirt und addirt man beide Gleichungen, so entsteht $r^2 + r'^2 + 2rr' \cos(\varphi + \varphi') = e^2 + e'^2 + 2ee' \cos\gamma$. Die rechte Seite ist nach §. 3, 10 zu berechnen, dann ein Ausdruck für $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ zu entwickeln. Zur Berechnung von $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ dienen $\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \frac{e}{r}$, $\frac{\cos\varphi'}{\cos\psi'} = \frac{e'}{r'}$ in Verbindung mit $\psi + \psi' = \gamma$ und dem berechneten Werthe für $\varphi + \varphi'$ (§. 9, 9).

214. $PX : PX' = m : n$. Aufl. Aehnlich wie in 212 und 213 findet man $n^2r^2 + m^2r'^2 + 2mnrr' \cos(\varphi + \varphi') = n^2e^2 + m^2e'^2 + 2mnee' \cos\gamma$. Die rechte Seite ist nach §. 3, 10 zu berechnen und dann ein Ausdruck für $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ aufzustellen. $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ werden berechnet wie 213.

aa) Gegeben K, K'. Eine Linie $XX' = a$ (X auf K, X' auf K') so zu ziehen, daß sie

215. parallel KK' wird. Aufl. Bekannt a, r, r', $AA' = c$, gesucht, wenn auf die Verlängerungen von XX' die Senkrechten KZ und KZ' gefällt werden, $\angle XKZ = \varphi$, $\angle X'K'Z' = \varphi'$. Es ist $r \sin\varphi + r' \sin\varphi' = c - a$, $r \cos\varphi - r' \cos\varphi' = 0$. Beide Gleichungen quadrirt und addirt giebt $\cos(\varphi + \varphi') = \frac{r^2 + r'^2 - (c-a)^2}{2rr'}$ oder $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')^2 = \frac{(c-a)^2 - (r-r')^2}{(r+r')^2 - (c-a)^2}$, ferner $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{r'}{r}$ (§. 7, 5).

216. parallel L wird. Aufl. ähnlich wie 215. Bekannt ist noch $\angle (L, KK') = \alpha$. Aus den Gleichungen $r \sin\varphi + r' \sin\varphi' = c \cos\alpha - a$ und $r \cos\varphi - r' \cos\varphi' = c \sin\alpha$ findet man durch Quadriren und Addiren $r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi + \varphi') = c^2 + a^2 - 2ac \cos\alpha$. Die rechte Seite ist nach §. 3, 10 zu berechnen, dann ein Ausdruck für $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ zu gewinnen. Zur Berechnung von φ und φ' dient $r \cos\varphi - r' \cos\varphi' = c \sin\alpha$ (§. 3, 5).

bb) Gegeben K, K′, K″. An K″ eine Tangente so zu ziehen, daß, wenn man an K und K′ Tangenten construirt, die auf der ersten senkrecht stehen, noch eine Bedingung erfüllt wird. Die Berührungspunkte an K, K′, K″ sind bezüglich Y, Y′, Y″, die Tangente an K″ sei XX′, und YX ⊥ XX′, Y′X′ ⊥ XX′. Hier werde nur der Fall betrachtet, daß alle drei Kreise auf derselben Seite von XX′ und zwischen XY und X′Y′ liegen. Bekannt ist r, r′, r″, KK″ = a, K′K″ = a′, ∠ KK″K′ = γ, sowie sämmtliche Stücke von △ KK′K″, gesucht, wenn man ZZ′ ∥ XX′ durch K″ zieht, ∠ KK″Z = φ, ∠ K′K″Z′ = φ'. Es ist XY = $a \sin\varphi + r''$, X′Y′ = $a' \sin\varphi' + r''$, XY″ = $a \cos\varphi + r$, X′Y″ = $a' \cos\varphi' + r'$, $\varphi + \varphi' = \pi - \gamma$.

An K, K′, K″ drei Tangenten, von denen zwei auf der dritten senkrecht stehen, so zu ziehen, daß

217. XY = X′Y′ (§. 7, 1). 218. XY″ = X′Y″ (§. 3, 5).

219. XY = X′Y″. Aufl. $a \sin\varphi - a' \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi') = r - r'$ (§. 3, 4).

220. XY + X′Y′ = s (§. 3, 3) 223. XY″ − X′Y″ = d (§. 3, 5)

221. XY − X′Y′ = d (§. 3, 3) 224. XY : X′Y′ = m : n (§. 3, 3)

222. XX′ = b (§. 3, 5) 225. XY″ : X′Y″ = m : n (§. 3, 5)

226. XY″ : X′Y′ = m : n. Aufl. $ma' \sin\varphi' - na \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = nr - mr''$ (§. 3, 4).

227. XY + X′Y′ = XX′. Aufl. $a(\sin\varphi - \cos\varphi) + a'(\sin\varphi' - \cos\varphi') = r + r' - 2r''$, daher $a \sin(\varphi - \frac{1}{4}\pi) + a' \sin(\varphi' - \frac{1}{4}\pi) = \frac{r + r' - 2r''}{\sqrt{2}}$ (§. 3, 3).

§. 40.

Aufgaben über den Kreis.

Gegeben gerade Linien, Punkte, Kreise, gesucht ein Kreis.

a) Gegeben P, P′, P″. Um P″ einen Kreis so zu beschreiben, daß die an ihn gezogenen Tangenten PX und P′X′ eine Bedingung erfüllen. Bekannt PP″ = e, P′P″ = e′, sowie alle Stücke von △ PP′P″. Gesucht ∠ PP″X = φ, P′P″X′ = φ', Radius x. Es ist $e \cos\varphi = e' \cos\varphi'$, PX = $e \sin\varphi$, P′X′ = $e' \sin\varphi'$.

Um P″ einen Kreis zu beschreiben, so daß, wenn die Tangenten PX und P′X′ an ihn gezogen werden,

1. PX : P′X′ = m : n. Aufl. $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{me'}{ne}$, $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{e'}{e}$ (§. 9, 3).

2. $PX + P'X' = s$. Aufl. $e \sin\varphi + e' \sin\varphi' = s$, $e \cos\varphi - e' \cos\varphi' = 0$. Dann wie §. 39, 215.
3. $PX - P'X' = d$ (2).

b) Gegeben P innerhalb $\angle ACB$. Um P einen Kreis, der CA in X und Y (X näher an C), CB in X' und Y' so schneidet, daß noch eine Bedingung erfüllt wird. Bekannt $\angle ACP = \alpha$, $\angle BCP = \alpha'$, $CP = e$, gesucht $PX = x$, $\angle XPY = 2\varphi$, $\angle X'PY' = 2\varphi'$. Es ist $x \cos\varphi = e \sin\alpha$, $x \cos\varphi' = e \sin\alpha'$, also $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$, ferner $XY = 2x \sin\varphi = 2e \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi$, $X'Y' = 2e \sin\alpha' \operatorname{tg}\varphi'$, $CX = e \cos\alpha - \frac{1}{2} XY = e \cos\alpha - e \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi = \frac{e \cos(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi}$, ebenso $CX' = \frac{e \cos(\alpha' + \varphi')}{\cos\varphi'}$, $CY = \frac{e \cos(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}$, $CY' = \frac{e \cos(\alpha' - \varphi')}{\cos\varphi'}$.

Um P einen Kreis, der CA in X und Y, CB in X' und Y' trifft, so zu bestimmen, daß

4. $\angle XPX' = \gamma$ (§. 7, 5).
5. $\angle YPY' = \gamma$ (§. 7, 5).
6. $\angle XPY' = \gamma$ (§. 7, 6).
7. $XY . X'Y' = m : n$. Aufl. $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$, $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{m}{n}$ (§. 9, 3).
8. $XX' \parallel L$. Aufl. Bekannt $\angle CXX' = \beta$, $\angle CX'X = \beta'$. Es ist $\varphi - \varphi' = \angle CXP - CX'P = \beta - \beta'$ (§. 7, 6).
9. $YY' \parallel L$ (8).
10. $XY' \parallel L$ (8; §. 7, 5).
11. $CX : CX' = m : n$ (8).
12. $CY : CY' = m : n$ (9).
13. $CX : CY' = m : n$ (10).

c) Gegeben $\triangle ABC$ und P auf AB. Um P einen Kreis, der AC in X und BC in X' so schneidet, daß noch einer Bedingung genügt wird. Bekannt sämmtliche Stücke von $\triangle ABC$, $AP = c_1$, $BP = c_2$, leicht daraus zu berechnen $\angle ACP = \gamma_1$, $\angle BCP = \gamma_2$, gesucht $\angle APX = \psi$, $BPX' = \psi'$ und $PX = PX' = x$. Es ist $x = \frac{c_1 \sin\alpha}{\sin(\alpha + \psi)} = \frac{c_2 \sin\beta}{\sin(\beta + \psi')}$, daher $\frac{\sin(\alpha + \psi)}{\sin(\beta + \psi')} = \frac{c_1 \sin\alpha}{c_2 \sin\beta} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$, $AX = \frac{c_1 \sin\psi}{\sin(\alpha + \psi)}$, $BY = \frac{c_2 \sin\psi'}{\sin(\beta + \psi')}$.

Um P einen Kreis, der AC in X, BC in X' trifft, so zu beschreiben, daß

14. $AX = BY$. Aufl. $\frac{\sin(\alpha + \psi)}{\sin(\beta + \psi')} = \frac{c_1 \sin\alpha}{c_2 \sin\beta} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$, $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (§. 9, 10).

15. AX : BY = m : n (14).

16. △ APX = BPY. Aufl. $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{c_2}{c_1}$, $\frac{\sin(\alpha+\psi)}{\sin(\beta+\psi')} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$ (§. 9, 10).

d) Gegeben P, P′ und L. Um P′ einen Kreis, der L in X′ und Y′ schneidet, so zu beschreiben, daß, wenn man an ihn die Tangente PX zieht,

17. PX = X′Y′. Aufl. Bekannt ist PP′ = e, die von P′ auf L gefällte Senkrechte a, gesucht ∠ PP′X = φ, ∠ X′P′Y′ = $2\varphi'$. Es ist $PX = e\cos\varphi$, $P'X' = \frac{a}{\cos\varphi'}$, also $\cos\varphi\cos\varphi' = \frac{a}{e}$. Ferner $PX = e\sin\varphi$, $X'Y' = 2a\,tg\,\varphi'$, folglich $e\sin\varphi = 2a\,tg\,\varphi'$. Eliminirt man φ, so ergiebt sich $tg\,\varphi'^2 = \frac{e^2 - a^2}{5a^2}$.

18. PX : X′Y′ = m : n. Aufl. ähnlich wie 17. $tg\,\varphi'^2 = \frac{n^2(e^2-a^2)}{(n^2+4m^2)a^2}$.

e) Gegeben P und K. Um P soll ein Kreis beschrieben werden, der noch eine Bedingung erfüllt. Ist X ein Durchschnittspunkt beider Kreise, so kommt die Auflösung stets auf die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks PKX hinaus, von welchem PK = e, KX = r bekannt ist.

Um P einen Kreis zu beschreiben, welcher

19. K rechtwinklig schneidet (P außerhalb K).

20. die Peripherie von K halbirt.

21. dessen Peripherie von K halbirt wird (P innerhalb K).

22. Gegeben P, K, K′. Um P einen Kreis zu beschreiben, der K und K′ unter gleichen Sehnen XY und X′Y′ schneidet. Aufl. Bekannt PK = e, PK′ = e′, ∠ KPK′ = α, gesucht ∠ PKX = φ, ∠ PK′X′ = φ', ∠ XPK = X′PK′ = ψ, PX = PX′ = x. Es ist $r\cos\varphi + x\cos\psi = e$, $r'\cos\varphi' + x\cos\psi = e'$, folglich $r\cos\varphi - r'\cos\varphi' = e - e'$, ferner $r\sin\varphi - r'\sin\varphi' = 0$. Beide Gleichungen quadrirt und addirt, giebt $\cos(\varphi - \varphi') = \frac{r^2 + r'^2 - (e-e')^2}{2rr'}$, $tg\,\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')^2 = \frac{(e-e')^2 - (r-r')^2}{(r+r')^2 - (e-e')^2}$, dann φ und φ' nach §. 7, 2, endlich ψ aus $\frac{\sin(\psi+\varphi)}{\sin\psi} = \frac{e}{r}$ oder $\frac{\sin(\psi+\varphi')}{\sin\psi} = \frac{e'}{r}$ (§. 7, 2).

23. Gegeben P, K, K′. Um P einen Kreis zu beschreiben, so daß die von seiner Peripherie an K und K′ gezogenen gemeinschaftlichen (hier äußeren) Tangenten XY und X′Y′ (Y auf K, Y′ auf K′)

einander gleich werden. Aufl. Bekannt r, r', $PK = e$, $PK' = e'$, $\angle KPK'$, gesucht $\angle PKY = \varphi$, $\angle PK'Y' = \varphi'$, $PX = PX' = x$. Es ist $KY = e \cos\varphi + x$, $K'Y' = e' \cos\varphi' + x$, daher $e \cos\varphi - e' \cos\varphi' = r - r'$, ferner $XY = e \sin\varphi$, $X'Y' = e' \sin\varphi'$, also $e \sin\varphi - e' \sin\varphi' = 0$, dann wie 22.

24. Gegeben zwei concentrische Kreise K und P zwischen ihren Peripherien. Um P einen Kreis, der die Peripherie des einen Kreises in X, die des anderen in Y trifft, so zu beschreiben, daß KXY eine gerade Linie wird. Aufl. Gegeben r, r' $(r > r')$, $KP = e$, gesucht $\angle PKX = \varphi$, $PX = PY = x$. Aus $\triangle PYK$ und PXK findet man $x^2 = a^2 + r'^2 - 2ar' \cos\varphi$, und $x^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos\varphi$, daher $\cos\varphi = \frac{r^2 - r'^2}{2a(r - r')} = \frac{r + r'}{2a}$.

f) Einen Kreis zu bestimmen, dessen Mittelpunkt M auf L liegt und der

25. durch P und P' geht (§. 38, 55).

26. durch P geht und K berührt (§. 38, 54).

27. K und K' berührt (§. 38, 54).

28. durch P geht und L' berührt. 1. Aufl. Er berühre L' in X, L und L' schneiden sich in A. Bekannt ist die auf L gefällte Senkrechte $PA = a$ und $AQ = b$, $\angle AMX = \beta$, gesucht $MX = x$ und $\angle PMQ = \psi$. Es ist $x \sin\psi = a$ und $b = x \cos\psi + \frac{x}{\cos\beta}$, daher $b \cos\beta \sin\psi - a \cos\beta \cos\psi = a$ (§. 3, 1).
2. Aufl. Als bekannt kann man auch betrachten $PA = e$, $\angle PAQ = \alpha$. Dann ist $\sin(\psi - \alpha) = \frac{a}{e \cos\beta}$.

29. durch P geht und L' unter dem gegebenen Winkel γ schneidet. Aehnlich wie 28. Der Kreis schneide L' in X und Y, Z sei die Mitte von XY, $\angle AMZ = \beta$. 1. Aufl. $b \cos\beta \sin\psi - a \cos\beta \cos\psi = a \cos\gamma$ (§. 3, 1). 2. Aufl. $\sin(\psi - \alpha) = \frac{a \cos\gamma}{e \cos\beta}$.

30. durch P geht und L unter der Sehne $2s$ schneidet. Aufl. Bezeichnungen wie 29. $x \sin\psi = e \sin\alpha$, $s = x \sin\varphi$ und $e \cos\alpha = x \cos\psi + \frac{s \cot\varphi}{\cos\beta}$. Nach Elimination von x und ψ erhält man $(e^2 + s^2) \cos 2\varphi - 2es \cos\alpha \sin 2\varphi = s^2 \cos 2\beta - e$ (§. 3, 1).

31. L' berührt und L'' unter dem Winkel α schneidet. Aufl. Bekannt $\angle(LL') = \gamma$, α und das von L, L', L'' gebildete Dreieck, gesucht der Radius x und die Winkel φ und ψ, welche CM mit L und L' bildet. Es ist $CM \sin\varphi = x$ und $CM \sin\psi = x \cos\alpha$, daher $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \cos\alpha$ (§. 7, 1).

32. L′ unter dem Winkel α, L″ unter dem Winkel β schneidet. Aufl. ähnlich wie 31. $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ (§. 7, 1).
33. L′ und K′ berührt. Aufl. Er berühre L′ in X, L und L′ schneiden sich in A. Bekannt r, AK $= e$, $\angle$ KAM $= \alpha$, MAX $= \beta$, gesucht $\angle$ KMA $= \psi$, MX $= x$. Es ist, wenn KQ $\perp$ AM, $(x + r)\sin\psi = e \sin\alpha$ und $e\cos\alpha =$ AQ $=$ AM $-$ MQ $= \frac{x}{\sin\beta} - (x + r)\cos\psi$. Nach Elimination von x ergiebt sich $(e\cos\alpha\sin\beta + r)\sin\psi + e\sin\alpha\sin\beta\cos\psi = e\sin\alpha$ (§. 3, 1).
34. L′ unter dem Winkel γ schneidet und K berührt. Aufl. wie 33. $(e\cos\alpha\sin\beta + r\cos\gamma)\sin\psi + e\sin\alpha\sin\beta\cos\psi = e\sin\alpha\cos\gamma$ (§. 3, 1).

g) Gegeben P, P′, L. PP′ schneide L in A. Bekannt $\angle$ (L, PP′) $= \alpha$, AP $= a$, AP′ $= a'$, gesucht $\angle$ PMP′ $= \varphi$ und der Radius x.
Einen Kreis zu bestimmen, der
35. durch P und P′ geht und L berührt. Aufl. Der Berührungspunkt sei X. Man ziehe durch M eine Parallele zu L, bis sie die von P und P′ auf L gefällten Senkrechten trifft. Es ist dann $2x\sin\varphi = a' - a$, $a\sin\alpha = x + x\cos(\alpha + \varphi)$, $a'\sin\alpha = x + x\cos(\alpha - \varphi)$ (die erste Gleichung ist eine Folge der beiden letzten). Man findet, wenn man x eliminirt, $(a' + a)\sin\alpha\sin\varphi - (a' - a)\cos\alpha\cos\varphi = a' - a$ (§. 3, 1), oder auch $\frac{\cos {}^1/_2(\alpha + \varphi)}{\cos {}^1/_2(\alpha - \varphi)} = \sqrt{\frac{a}{a'}}$ (§. 7, 11).
36. durch P und P′ geht und L unter dem Winkel γ schneidet. Aufl. ähnlich wie 35. $(a' + a)\sin\alpha\sin\varphi - (a' - a)\cos\alpha\cos\varphi = (a' - a)\cos\gamma$.
37. durch P und P′ geht und L unter der Sehne 2s schneidet. Aufl. Er schneide L in X und Y, $\angle$ XMY $= \psi$. Auf ähnliche Weise wie in 35 gelangt man zu den Gleichungen $2x\sin\varphi = a' - a$, $x\sin\psi = s$, $x\cos\psi + x\cos(\alpha - \varphi) = a'\sin\alpha$, $x\cos\psi + x\cos(\alpha + \varphi) = a\sin\alpha$, von denen die erste aus den beiden letzten folgt. x und φ sind zu eliminiren, dann findet man $4s^2\sin\alpha^2\cot\psi^2 - 4(a' + a)s\sin\alpha\cot\psi + (a' + a)^2\sin\alpha^2 + (a' - a)^2\cos\alpha^2 - 4s^2\cos\alpha^2 = 0$.

h) Gegeben P, L und L′. L und L′ schneiden sich in A. Bekannt AP $= e$, $\angle$ (L, AP) $= \alpha$, $\angle$ (L′, AP) $= \alpha'$, gesucht $\angle$ (L, AM) $= \psi$, $\angle$ (L′, AM) $= \psi'$, Radius x, AM $= y$.

Einen Kreis zu beschreiben, der

38. L in P berührt und L′ unter dem Winkel γ schneidet. Aufl. $y \sin\psi = x$, $y \sin\psi' = x \cos\gamma$, daher $\frac{\sin\psi'}{\sin\psi} = \cos\gamma$ (§. 7, 5).

39. L in P berührt und L′ unter der Sehne 2 s schneidet. Aufl. Es ist $y \cos\psi = e$, $y \sin\psi = x$, $y \sin\psi' = \sqrt{x^2 - s^2}$. Die Elimination von x und y ergiebt $e^2 \cos 2\psi' - (s^2 + e^2) \cos 2\psi = s^2$ (§. 3, 5).

40. L und L′ berührt und durch P geht. Aufl. $\psi = \psi' = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$. Setzt man $\angle$ APM $= \varphi$, so ist $\sin\varphi = \frac{y \sin PAM}{x} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')}$.

41. L berührt, L′ unter dem Winkel γ schneidet und durch P geht. Aufl. wie 38, dann, $\angle$ APM $= \varphi$ gesetzt, $\sin\varphi = \frac{y \sin MAP}{x} = \frac{\sin(\alpha - \psi)}{\sin\psi} = \frac{\sin(\psi' - \alpha')}{\sin\psi}$.

42. L unter dem Winkel γ, L′ unter dem Winkel γ' schneidet und durch P geht. Aufl. $y \sin\psi = x \cos\gamma$, $y \sin\psi' = x \cos\gamma'$, daher $\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'}$ (§. 7, 5). Dann, $\angle$ APM $= \varphi$ gesetzt, ist $\sin\varphi = \frac{y \sin PAM}{x} = \frac{\sin(\alpha - \psi)\cos\gamma}{\sin\psi} = \frac{\sin(\psi' - \alpha')\cos\gamma'}{\sin\psi'}$.

i) Gegeben L, L′, L″. Bekannt sämmtliche Stücke des von L, L′, L″ gebildeten Dreiecks ABC. In den folgenden Aufgaben sind die Winkel, welche MA, MB, MC mit den Seiten bilden, entweder die Hälften der ganzen Dreieckswinkel, oder sie lassen sich aus denselben berechnen, wie ψ und ψ' in 38 und 42.

Einen Kreis zu beschreiben, der

43. L und L′ berührt, L″ unter dem Winkel γ schneidet.

44. L berührt, L′ unter dem Winkel γ', L″ unter dem Winkel γ'' schneidet.

45. L, L′, L″ bezüglich unter den Winkeln γ, γ', γ'' schneidet.

Gegeben L, L′, K. L und L′ schneiden sich in A. Bekannt r, AK $= e$, $\angle$ (L, AK) $= \alpha$, $\angle$ (L′, AK) $= \alpha'$, gesucht $\angle$ (L, AM) $= \psi$, $\angle$ (L′, AM) $= \psi'$, Radius x, AM $= y$, $\angle$ AKM $= \varphi$.

Einen Kreis zu beschreiben, der

46. L, L′ und K berührt. Aufl. $\psi = \psi' = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$. Ferner $y \sin \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = x$, und (aus $\triangle$ AMK) $y = \frac{e \sin\varphi}{\sin(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha' + \varphi)}$,

$x + r = \frac{e \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}{\sin(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha' + \varphi)}$. Die Elimination von x und y ergiebt $e \sin \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') \sin\varphi + r \sin(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha' + \varphi) = e \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')$ (§. 3, 3).

47. L und K berührt, L' unter dem Winkel γ schneidet. Aufl. wie 46. $e \sin\psi \sin\varphi + r \sin(\alpha - \psi + \varphi) = e \sin(\alpha - \psi)$ (§. 3, 3).

48. K berührt, L und L' bezüglich unter den Winkeln γ und γ' schneidet. Aufl. wie 46. $y \sin\psi = x \cos\gamma$, $y = \frac{e \sin\varphi}{\sin(\alpha - \psi + \varphi)}$, $x + r = \frac{e \sin(\alpha - \psi)}{\sin(\alpha - \psi + \varphi)}$. Nach Elimination von x und y entsteht $e \sin\psi \sin\varphi + r \cos\gamma \sin(\alpha - \psi + \varphi) = e \cos\gamma \sin(\alpha - \psi)$ (§. 3, 3).

49. Einen Kreis zu beschreiben, der K und L berührt (K in X, L in Y) und dessen Berührungssehne zwischen K und L (XY) = 2s ist. Aufl. Bekannt r, die von K auf L gefällte Senkrechte KA, gesucht $\angle$ XMY $= 2\varphi$ und Radius x. Man ziehe durch M eine Parallele zu AY. Es ist $x \sin\varphi = s$, $a = x + (x + r)\sin(2\varphi - \frac{1}{2}\pi) = x - (x + r)\cos 2\varphi$. Durch Elimination von x ergiebt sich $a \sin\varphi = s - s\cos 2\varphi - r \sin\varphi \cos 2\varphi$ oder $a \sin\varphi = 2s \sin\varphi^2 - r \sin\varphi \cos 2\varphi$, endlich, nachdem man durch $\sin\varphi$ dividirt hat, $2r \sin\varphi^2 + 2s \sin\varphi - (a + r) = 0$.

50. Einen Kreis zu beschreiben, welcher L und K berührt und durch P geht. Aufl. Bekannt r und die auf L gefällten Senkrechten KA = b, PB = b', AB = a, gesucht der Radius x, $\angle$ AKM $= \varphi$, $\angle$ BPM $= \varphi'$. Es ist $x + (r + x)\cos\varphi = b$, $x + x\cos\varphi' = b'$ und $(r + x)\sin\varphi + x \sin\varphi' = a$. Aus den ersten beiden Gleichungen findet man $r + x = \frac{b + r}{2\cos\frac{1}{2}\varphi^2}$ (I) und $x = \frac{b'}{2\cos\frac{1}{2}\varphi'^2}$ (II). Diese Werthe in die dritte Gleichung eingesetzt, giebt $(b + r)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi + b'\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi' = a$ (III). Durch Subtraction von (I) und (II) erhält man $(b + r)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi^2 - b'\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi'^2 = b' - b + r$ (IV). Aus (III) und (IV) ist $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$ und $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi'$ algebraisch zu berechnen.

51. Einen Kreis zu beschreiben, welcher L, K und K' berührt. Aufl. Bekannt r, r' und die auf L gefällten Senkrechten KA = b, K'A' = b', AA' = a, gesucht der Radius x, $\angle$ AKM $= \varphi$, $\angle$ A'K'M $= \varphi'$. Aehnlich wie in 50 findet man $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$ und $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi'$ aus $(b + r)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi + (b' + r')\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi' = a$, $(b + r)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi^2 - (b' + r')\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi'^2 = b' - r' - b + r$.

k) Für die Aufgaben 52 bis 73 ist Folgendes zu beachten.

α) Wenn ein Kreis M durch P geht und K berührt, ist $MK - MP = r$.

β) Wenn ein Kreis M durch P geht und K rechtwinklig schneidet, ist $MK^2 - MP^2 = r^2$.

γ) Wenn ein Kreis M durch P geht und die Peripherie von K halbirt, so ist $MP^2 - MK^2 = r^2$.

δ) Wenn ein Kreis M durch P geht und seine Peripherie von K halbirt wird, so ist $MK^2 + MP^2 = r^2$.

ε) Wenn ein Kreis M die Kreise K und K′ (von außen) berührt, ist $MK - MK' = r - r'$.

ζ) Wenn ein Kreis M die Kreise K und K′ rechtwinklig schneidet, ist $MK^2 - MK'^2 = r^2$.

η) Wenn ein Kreis M die Peripherien von K und K′ halbirt, so ist $MK'^2 - MK^2 = r^2 - r'^2$.

ϑ) Wenn die Peripherie des Kreises M von K und K′ halbirt wird, so ist $MK^2 - MK'^2 = r^2 - r'^2$.

ι) Wenn ein Kreis M den Kreis K rechtwinklig schneidet und die Peripherie von K′ halbirt, so ist $MK^2 - MK'^2 = r^2 + r'^2$.

$\varkappa$) Wenn ein Kreis M den Kreis K rechtwinklig schneidet und seine Peripherie von K′ halbirt wird, so ist $MK^2 + MK'^2 = r^2 + r'^2$.

λ) Wenn ein Kreis M die Peripherie von K halbirt und seine Peripherie von K′ halbirt wird, so ist $MK^2 + MK'^2 = r'^2 - r^2$.

Mit Hülfe dieser Sätze sind die folgenden Aufgaben auf §. 38, 148 bis 151 zurückzuführen.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher

52. durch P und P′ geht und K berührt (§. 38, 149). 2. Aufl. Bekannt r, sämmtliche Stücke von $\triangle PP'K$, wie $PK = e$, $P'K = e'$, $\angle KPP' = \alpha$, $\angle KP'P = \alpha'$, gesucht $MP = x$, $\angle KPM = \psi$, $\angle KP'M = \psi'$, $\angle MKP = \varphi$, $\angle MKP' = \varphi'$. Es ist $\frac{x+r}{e} = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$, $\frac{x}{e} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}$, daher, wenn man Beides subtrahirt, $\frac{r}{e} = \frac{\sin\psi - \sin\varphi}{\sin(\psi+\varphi)} = \frac{\sin {}^1\!/_2(\psi-\varphi)}{\sin {}^1\!/_2(\psi+\varphi)}$, und ebenso $\frac{e'}{r} = \frac{\sin {}^1\!/_2(\psi'+\varphi')}{\sin {}^1\!/_2(\psi'-\varphi')}$, ferner ${}^1\!/_2(\psi-\varphi) - {}^1\!/_3(\psi'+\varphi') = {}^1\!/_2(\psi-\psi') - {}^1\!/_2(\varphi+\varphi') = {}^1\!/_2(\alpha-\alpha') - {}^1\!/_2(\pi-\alpha-\alpha') = \alpha - {}^1\!/_2\pi$ und ${}^1\!/_2(\psi+\varphi) - {}^1\!/_2(\psi'-\varphi') = {}^1\!/_2(\psi-\psi') + {}^1\!/_2(\varphi+\varphi') = {}^1\!/_2(\alpha-\alpha') + {}^1\!/_2(\pi-\alpha-\alpha') = \alpha' + {}^1\!/_2\pi$ (§. 9, 10).

53. durch P und P′ geht und K rechtwinklig schneidet (§. 38, 150).

54. durch P und P′ geht und die Peripherie von K halbirt (§. 38, 150).

55. durch P und P′ geht und dessen Peripherie von K halbirt wird (§. 38, 151).
56. durch P geht und K und K′ berührt (§. 38, 149).
57. durch P geht und K und K′ rechtwinklig schneidet (§. 38, 150).
58. durch P geht, K rechtwinklig schneidet und die Peripherie von K′ halbirt (§. 38, 150).
59. durch P geht, K rechtwinklig schneidet, und dessen Peripherie von K′ halbirt wird (§. 38, 151).
60. durch P geht und die Peripherien von K und K′ halbirt (§. 38, 150).
61. durch P geht, die Peripherie von K halbirt, und dessen Peripherie von K′ halbirt wird (§. 38, 151).
62. durch P geht, und dessen Peripherie von K und K′ halbirt wird (§. 38, 150).
63. K, K′, K″ berührt (Apollonisches Berührungsproblem). (§. 38, 149).
64. K, K′, K″ rechtwinklig schneidet (§. 38, 150).
65. K und K′ rechtwinklig schneidet und die Peripherie von K″ halbirt (§. 38, 150).
66. K und K′ rechtwinklig schneidet, und dessen Peripherie durch K″ halbirt wird (§. 38, 151).
67. K rechtwinklig schneidet und die Peripherien von K′ und K″ halbirt (§. 38, 150).
68. K rechtwinklig schneidet, die Peripherie von K′ halbirt und dessen Peripherie von K″ halbirt wird (§. 38, 151).
69. K rechtwinklig schneidet, und dessen Peripherie von K und K′ halbirt wird (§. 38, 151).
70. die Peripherien von K, K′, K″ halbirt (§. 38, 150).
71. die Peripherien von K und K′ halbirt und dessen Peripherie von K″ halbirt wird (§. 38, 151).
72. die Peripherie von K halbirt, und dessen Peripherie von K und K′ halbirt wird (§. 38, 151).
73. dessen Peripherie von K, K′, K″ halbirt wird (§. 38, 150).
74. Malfattische Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck ABC drei Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden anderen und zwei Dreiecksseiten berührt. 1. Aufl. von Grunert. Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise seien X, Y, Z, ihre Radien x, y, z, und zwar berühre der erste AB und AC, der zweite AB und BC, der dritte AC und BC. Der Berührungspunkt der Kreise X und Y sei D, ihre Berührungspunkte mit AB bezüglich G und H. Bekannt $\triangle$ ABC, gesucht x, y, z. Zieht man durch X eine Parallele zu AB, bis sie YH in L trifft, so ist $GH^2 = XL^2 = XY^2 - YL^2$

$= (x + y)^2 + (y - x)^2 = 4xy$, ferner $AG = x \cot \tfrac{1}{2}\alpha$, $BH = y \cot \tfrac{1}{2}\beta$, folglich $2\sqrt{xy} = c - x \cot \tfrac{1}{2}\alpha - y \cot \tfrac{1}{2}\beta$. Durch ähnliche Behandlung der anderen Kreise ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} 2\sqrt{xy} &= c - x \cot \tfrac{1}{2}\alpha - y \cot \tfrac{1}{2}\beta \\ 2\sqrt{yz} &= a - y \cot \tfrac{1}{2}\beta - z \cot \tfrac{1}{2}\gamma \\ 2\sqrt{zx} &= b - z \cot \tfrac{1}{2}\gamma - x \cot \tfrac{1}{2}\alpha \end{aligned}\right\} \quad (I).$$

Multiplicirt man von diesen Gleichungen die zweite mit $\sin\beta$, die dritte mit $\sin\alpha$ und subtrahirt dann beide, so erhält man $2\sqrt{yz}\sin\beta - 2\sqrt{zx}\sin\alpha = -2y\cos\tfrac{1}{2}\beta^2 + 2x\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 + z\cot\tfrac{1}{2}\gamma(\sin\alpha - \sin\beta)$, und da $\cot\tfrac{1}{2}\gamma(\sin\alpha - \sin\beta) = \cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 2\sin\tfrac{1}{2}\beta^2$ ist, so ergiebt sich $\sqrt{yz}\sin\beta - \sqrt{zx}\sin\alpha = -y\cos\tfrac{1}{2}\beta^2 + x\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 + z\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - z\sin\tfrac{1}{2}\beta^2$, oder $y\cos\tfrac{1}{2}\beta^2 + 2\sqrt{yz}\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta + z\sin\tfrac{1}{2}\beta^2 = x\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 + 2\sqrt{xz}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha + z\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$, oder nach Ausziehung der Quadratwurzel $\sqrt{y}\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{z}\sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{x}\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{z}\sin\tfrac{1}{2}\alpha$. Auf beiden Seiten mußte das positive Zeichen genommen werden, da keine der beiden Seiten negativ werden kann. Durch ähnliche Behandlung der ersten und zweiten, ebenso der ersten und dritten Gleichung erhält man

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{y}\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{z}\sin\tfrac{1}{2}\beta &= \sqrt{x}\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{z}\sin\tfrac{1}{2}\alpha \\ \sqrt{z}\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{x}\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sqrt{y}\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{x}\sin\tfrac{1}{2}\beta \\ \sqrt{x}\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{y}\sin\tfrac{1}{2}\alpha &= \sqrt{z}\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{y}\sin\tfrac{1}{2}\gamma \end{aligned}\right\} \quad (II).$$

Durch Subtraction der zweiten und dritten dieser Gleichungen ergiebt sich $\sqrt{r}(\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\beta + \sin\tfrac{1}{2}\gamma) = \sqrt{r_1}(\cos\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\tfrac{1}{2}\gamma)$. Nun ist aber $\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\beta + \sin\tfrac{1}{2}\gamma = 4\cos\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{4}\gamma\cos\tfrac{1}{4}\beta$ und $\cos\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\tfrac{1}{2}\gamma = 4\cos\tfrac{1}{4}(\alpha+\gamma)\sin\tfrac{1}{4}\gamma\cos\tfrac{1}{4}\alpha$, folglich

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{\cos\tfrac{1}{4}(\alpha+\gamma)\cos\tfrac{1}{4}\alpha}{\cos\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{4}\beta} = \frac{\cos\tfrac{1}{4}(\pi-\beta)\cos\tfrac{1}{4}\alpha}{\cos\tfrac{1}{4}(\pi-\alpha)\cos\tfrac{1}{4}\beta} = \frac{(\cos\tfrac{1}{4}\beta + \sin\tfrac{1}{4}\beta)\cos\tfrac{1}{4}\alpha}{(\cos\tfrac{1}{4}\alpha + \sin\tfrac{1}{4}\alpha)\cos\tfrac{1}{4}\beta} = \frac{1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\beta}{1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\alpha}$$ (III) und ebenso $$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\alpha}$$ (IV). Aus der ersten Gleichung (I) folgt $$\frac{c}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{x}{y}}\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{y}{x}}\cot\tfrac{1}{2}\beta + 2.$$ Setzt man rechts den in (III) gefundenen Werth für $\sqrt{\frac{x}{y}}$ ein, und beachtet, daß

$$\sqrt{\frac{x}{y}}\cot{}^1/_2\alpha = \frac{(1+tg{}^1/_4\beta)(1-tg{}^1/_4\alpha^2)}{(1+tg{}^1/_4\alpha)\,2\,tg{}^1/_4\alpha} = \frac{(1+tg{}^1/_4\beta)(1-tg{}^1/_4\alpha)}{2\,tg{}^1/_4\alpha}$$

ist, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{c}{\sqrt{rr_1}} = \frac{(tg{}^1/_4\alpha + tg{}^1/_4\beta)(1+tg{}^1/_4\alpha+tg{}^1/_4\beta - tg{}^1/_4\alpha\,tg{}^1/_4\beta)}{2\,tg{}^1/_4\alpha\,tg{}^1/_4\beta}$$

$$= \frac{2\sin{}^1/_4(\alpha+\beta)\,(\cos{}^1/_4(\alpha+\beta)+\sin{}^1/_4(\alpha+\beta))}{\sin{}^1/_2\alpha\,\sin{}^1/_2\beta} =$$

$$\frac{2\sqrt{2}\sin{}^1/_4(\alpha+\beta)\sin{}^1/_4(\alpha+\beta+\pi)}{\sin{}^1/_2\alpha\,\sin{}^1/_2\beta} = \frac{2\sqrt{2}\sin{}^1/_4(\alpha+\beta)\cos{}^1/_4\gamma}{\sin{}^1/_2\alpha\,\sin{}^1/_2\beta}.$$

Durch ein ähnliches Verfahren mit der zweiten und dritten Gleichung (I) erhält man die drei Gleichungen $\sqrt{xy} = \frac{c\sin{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta}{2\sqrt{2}\sin{}^1/_4(\alpha+\beta)\cos{}^1/_4\gamma}$,

$\sqrt{yz} = \frac{a\sin{}^1/_2\beta\sin{}^1/_2\gamma}{2\sqrt{2}\sin{}^1/_4(\beta+\gamma)\cos{}^1/_4\alpha}$, $\sqrt{zx} = \frac{b\sin{}^1/_2\gamma\sin{}^1/_2\alpha}{2\sqrt{2}\sin{}^1/_4(\gamma+\alpha)\cos{}^1/_4\beta}$.

Wenn man von diesen drei Gleichungen die erste und dritte multiplicirt und durch die zweite dividirt, ferner für b und c ihre Werthe $\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ und $\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ einsetzt, erhält man nach einigen Umformungen

$$x = \frac{2\sqrt{2}\,a\cos{}^1/_4\alpha\sin{}^1/_4\beta\sin{}^1/_4\gamma\cos{}^1/_4(\alpha+\gamma)\cos{}^1/_4(\alpha+\beta)}{\cos{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_4(\beta+\gamma)}$$

und ähnliche Ausdrücke für y und z. 2. Aufl. von Schellbach. Die Bezeichnungen bleiben dieselben, nur werde jetzt AG mit x, BH mit y, und die Entfernung des Punktes C von dem Berührungspunkte des Kreises Z und der Linie CA mit z bezeichnet. Dann ist $XG = x\,tg{}^1/_2\alpha$, $YH = y\,tg{}^1/_2\beta$, $XY = x\,tg{}^1/_2\alpha + y\,tg{}^1/_2\beta$, $GH = XL = c - x - y$, $YL = y\,tg{}^1/_2\beta - x\,tg{}^1/_2\alpha$. Durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung $XY^2 = XL^2 + YL^2$ ergiebt sich $x + y + 2\sqrt{xy}\,tg{}^1/_2\alpha\,tg{}^1/_2\beta = c$. Bezeichnet man nun $a + b + c$ mit $2s$, so ist $tg{}^1/_2\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

und $tg{}^1/_2\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$, mithin $tg{}^1/_2\alpha\,tg{}^1/_2\beta = 1 - \frac{c}{s}$.

Setzt man $1 - \frac{c}{s} = \cos\varphi^2$ oder $c = s\sin\varphi^2$ (I), so ergiebt sich

$x + y + 2\sqrt{xy}\cos\varphi = s\sin\varphi^2$ (II). Analog erhält man, wenn man $b = s\sin\chi^2$ (Ia) und $a = s\sin\psi^2$ (Ib) setzt, $x + z + 2\sqrt{xz}\cos\chi = s\sin\chi^2$ (IIa) und $y + z + 2\sqrt{yz}\cos\psi = s\sin\psi^2$ (IIb). Setzt man ferner $x = s\sin\lambda^2$, $y = s\sin\mu^2$, $z = s\sin\nu^2$, so geht (II) über in $\sin\lambda^2 + \sin\mu^2 + 2\sin\lambda\sin\mu\cos\varphi$

$= 1 - \cos\varphi^2$ oder $\cos\varphi^2 + 2 \sin\lambda \sin\mu \cos\varphi + \sin\lambda^2 \sin\mu^2 = 1 - \sin\lambda^2 - \sin\mu^2 + \sin\lambda^2 \sin\mu^2$ oder $\cos\varphi + \sin\lambda \sin\mu = \pm \cos\lambda \cos\mu$; daher ist $\cos\varphi = \pm \cos(\lambda \pm \mu)$, wo die oberen und unteren Zeichen zusammengehören. Folglich ist entweder $\lambda + \mu = \varphi$ oder $\lambda - \mu = \pi - \varphi$. Da letzterer Werth für die innerhalb des Dreiecks liegenden Kreise keine Bedeutung hat, so gilt nur $\lambda + \mu = \varphi$; analog $\lambda + \nu = \chi$, $\mu + \nu = \psi$. Durch Addition ergiebt sich $\lambda + \mu + \nu = \frac{1}{2}(\varphi + \chi + \psi) = \sigma$, mithin $\lambda = \sigma - \psi$, also $x = s \sin(\sigma - \psi)^2$ und analog $y = s \sin(\sigma - \chi)^2$, $z = s \sin(\sigma - \varphi)^2$.

Fünfter Abschnitt.

Aufgaben aus der angewandten Trigonometrie.

§. 41.

Aufgaben über Höhenmessungen.

Bei den Höhenmessungen sind in der Regel zwei Ebenen zu unterscheiden; nämlich die durch den jedesmaligen Standort der Messung gelegte Horizontalebene und eine durch die Vertikale des Standortes und einen Punkt außerhalb derselben gelegte Vertikalebene. Die in der ersteren Ebene liegenden Winkel werden Horizontal-Winkel, die in der zweiten gemessenen Vertikal-Winkel genannt. Nimmt man als den einen Schenkel eines Vertikal-Winkels die horizontale Linie, in welcher eine Vertikalebene des Standorts die Horizontalebene desselben schneidet, und welche Haupt-Horizontallinie genannt wird, so heißen die Vertikal-Winkel Höhen- (Elevations-) oder Tiefen- (Depressions-) Winkel. Daher ist Elevations-Winkel derjenige Vertikalwinkel, welchen eine nach einem Punkte visirte Linie mit dem Horizont bildet, wenn dieser Punkt über dem Horizont liegt; und Depressions-Winkel ist der Vertikalwinkel, den eine nach einem Punkt visirte Linie mit dem Horizont bildet, wenn dieser Punkt unter dem Horizont liegt.

Zur Berechnung von geraden Linien ist stets eine gerade Linie ursprünglich zu messen oder als bekannt vorauszusetzen, welche die Standlinie oder Basis der Messung genannt wird.

Zur Messung der Winkel bedient man sich des Theodolith. Um zu sehen, ob ein Gegenstand genau horizontal steht, gebraucht man die Libelle oder Wasserwage.

Unter Höhe eines Punktes versteht man das Loth von diesem Punkt auf die Haupt-Horizontallinie des Standorts.

Sämmtliche Aufgaben über Höhenmessungen lassen sich auf 6 Fälle zurückführen, und zwar in folgender Weise:

Die Höhe eines Punktes über der Horizontalebene des Standortes zu messen.

A. Wenn die zu wählende Standlinie in der Horizontalebene des Standortes liegt und
   a) mit der Haupt-Horizontallinie zusammenfällt, und in diesem Falle
      1. bis zum Fußpunkt der Vertikalen der zu bestimmenden Höhe zu messen ist;
      2. nicht bis zum Fußpunkt dieser Vertikalen zu messen ist;
   b) 3. mit der Haupt-Horizontallinie einen gegebenen Horizontalwinkel (Azimuth) macht.

B. Wenn die zu wählende Standlinie unter einem gegebenen Winkel gegen die Horizontalebene des Standortes geneigt ist und
   a) in der Vertikalebene der betreffenden Höhe liegt und in diesem Falle
      4. bis zum Durchschnittspunkt mit der Vertikalen,
      5. nicht bis zum Durchschnittspunkt zu messen ist;
   b) 6. in einer nicht durch die betreffende Höhe gelegten Vertikalebene liegt.

1. **Fig. 1.** Gemessen die Standlinie $AQ = a$ und der Elevationswinkel $PAQ = \alpha$; gesucht die Höhe $PQ = x$. Aufl. $x = a \operatorname{tg}\alpha$. Beisp. $a = 672$; $\alpha = 25^0\ 18'\ 27''$; $x = 317{,}7607$.

2. **Fig. 2.** Gemessen die Standlinie $AB = a$ und die Elevationswinkel in A und B, nämlich $PAQ = \alpha$ und $PBQ = \beta$; gesucht die Höhe $PQ = x$. Aufl. $AQ - BQ = a$, oder $x \cot\alpha - x \cot\beta = a$, oder $x = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$. Beisp. $a = 450$; $\alpha = 18^0\ 39'\ 45''$; $\beta = 34^0\ 26'\ 32''$; $x = 299{,}4818$.

3. **Fig. 3.** Gemessen die Standlinie $AB = a$, und entweder der Elevationswinkel $PAQ = \alpha$, oder der Elevationswinkel $PBQ = \beta$, ferner die Horizontalwinkel $BAQ = \gamma$ und $ABQ = \delta$. Gesucht die Höhe $PQ = x$. Aufl. Entweder $AQ = x \cot\alpha$; $\frac{x \cot\alpha}{\sin\delta} = \frac{a}{\sin(\gamma + \delta)}$; $x = \frac{a \operatorname{tg}\alpha \sin\delta}{\sin(\gamma + \delta)}$. Oder $BQ = x \cot\beta$; $\frac{x \cot\beta}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin(\gamma + \delta)}$;

$x = \frac{a \operatorname{tg}\beta \sin\gamma}{\sin(\gamma+\delta)}$. Beisp. $a = 270$; $\alpha = 18^0\,34'\,24''$; $\gamma = 31^0\,56'\,40''$; $\delta = 109^0\,42'\,50''$; $x = 137{,}6766$.

4. **Fig. 4.** Gemessen die Standlinie $AB = a$ oder $AB' = a'$, der Elevationswinkel $PAQ = \alpha$ und der Neigungswinkel der Standlinie gegen den Horizont, also im ersten Fall $\angle BAQ = \beta$ und im zweiten Fall $B'AQ = \beta'$; gesucht $PQ = x$. Aufl. 1. Fall. Die Standlinie liegt oberhalb des Horizonts. $x = AQ \operatorname{tg}\alpha = a \cos\beta \operatorname{tg}\alpha$; und $PB = \frac{a \sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}$. Beisp. $a = 400$; $\alpha = 53^0\,18'$; $\beta = 10^0\,48'$; $x = 527{,}1358$; $PB = 452{,}1832$. 2. Fall. Die Standlinie liegt unterhalb des Horizonts. $x = AQ \operatorname{tg}\alpha = a' \cos\beta' \operatorname{tg}\alpha$ und $PB' = \frac{a' \sin(\alpha+\beta')}{\cos\alpha}$. Beisp. $a' = 400$; $\alpha = 53^0\,18'$; $\beta' = 10^0\,48'$; $x = 527{,}1358$; $PB' = 602{,}0883$.

5. **Fig. 5.** Gemessen die Standlinie $AB = a$ oder im zweiten Fall $AB' = a'$; die Elevationswinkel $PAQ = \alpha$, $P'AQ = \alpha'$ und $PBR = \beta$; oder im zweiten Fall statt α' der Elevationswinkel $QAP'' = \alpha''$. Gesucht $PQ = x$. Aufl. 1. Fall. Die Standlinie AB liegt oberhalb des Horizonts. $x = AP \sin\alpha = \frac{a \sin(\beta-\alpha')\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$; und $PP' = PQ - P'Q = AP \sin\alpha - AQ \operatorname{tg}\alpha' = AP(\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha') = \frac{AP \sin(\alpha-\alpha')}{\cos\alpha'} = \frac{a \sin(\beta-\alpha')\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha'}$. Beisp. $a = 100$; $\alpha = 54^0\,17'\,20''$; $\alpha' = 21^0\,42'\,50''$; $\beta = 83^0\,39'\,10''$; $x = 146{,}1229$; $PP' = 104{,}2917$. 2. Fall. Die Standlinie AB' liegt unterhalb des Horizonts. $x = AP \sin\alpha = \frac{a' \sin(\beta'+\alpha'')\sin\alpha}{\sin(\beta'-\alpha)}$; und $PP'' = \frac{a' \sin(\alpha+\alpha'')\sin(\beta'+\alpha'')}{\sin(\beta'-\alpha)\cos\alpha''}$. Beisp. $a' = 120$; $\alpha = 60^0\,23'\,50''$; $\alpha'' = 18^0\,18'\,20''$; $\beta' = 87^0\,56'\,40''$; $x = 216{,}5896$; $PP'' = 257{,}299$.

6. **Fig. 6.** Gemessen die Standlinie $AB = a$, ihr Neigungswinkel gegen den Horizont $BAB' = \alpha'$, der Elevationswinkel $PAQ = \alpha$, und die beiden Horizontalwinkel $QAB' = \beta$ und $AB'Q = \gamma$, von denen der letztere, wenn man $BA' \parallel AB'$ und $BQ' \parallel B'Q$ annimmt, auch in B gemessen werden kann $= A'BQ'$. Gesucht $PQ = x$. Aufl. $x = AQ \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB' \sin\gamma \operatorname{tg}\alpha}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{a \cos\alpha' \sin\gamma \operatorname{tg}\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}$. Beisp. $a = 98$; $\alpha = 70^0\,46'\,36''$; $\alpha' = 23^0\,7'\,12''$; $\beta = 39^0\,40'\,25''$; $\gamma = 75^0\,11'\,32''$; $x = 275{,}4255$.

Zum Verständniß der folgenden Aufgaben, welche im Allgemeinen auf die oben behandelten 6 Fälle der Höhenaufgaben zurückkommen, sind noch einige in mehreren Aufgaben vorkommende Ausdrücke zu erklären.

1. Unter dem Sehwinkel oder der scheinbaren Größe eines Gegenstandes versteht man den Winkel, welchen die beiden vom Auge des Beobachters an die äußersten Grenzen des Gegenstandes gezogenen Linien (Visirlinien) miteinander bilden. Am häufigsten kommt in der Praxis der Fall vor, daß die eine Visirlinie auf dem Object senkrecht steht; geht dieser Fall jedoch aus einer Aufgabe nicht unzweideutig hervor, so ist immer ein von den Visirlinien gebildetes gleichschenkliges Dreieck der Rechnung zu Grunde zu legen. Ferner nimmt man an, daß für ein gewöhnliches Auge ein Gegenstand bei mäßiger Beleuchtung und reiner Luft unter einem Sehwinkel von 40″ noch sichtbar sei.
2. Fig. 7. Der um C beschriebene Kreis stelle einen größten Kreis der Erde vor; zieht man an denselben von dem über der Erdoberfläche befindlichen Punkt A die Tangente AB, so giebt der Berührungspunkt B den Ort an, bis zu welchem man von A aus, abgesehen von anderen Hindernissen als der Erdkrümmung, noch sehen kann. Die Weite des irdischen Horizonts für A wird durch den zum Winkel BCD gehörenden Bogen BD bestimmt. In allen Aufgaben ist der Erdradius = 859,437 Meilen, eine Meile = 7420,^{m}4396 und ein Grad der Erde = 15 Meilen angenommen.*)

a) Aufgaben, welche auf die erste Höhenaufgabe zurückzuführen sind oder mit ihr in Zusammenhang stehen.

1. Aus der Höhe eines Thurmes AB = a die directe Entfernung der Thurmspitze von einem Punkt C der Ebene unter der Voraussetzung zu berechnen, daß der Fuß des Thurmes von C aus nicht zugänglich

---

*) Die Aufgaben, in denen der Erdradius vorkommt, sind mit Zugrundelegung der geographischen Meile gestellt; kennen wir auch nicht genau die Länge einer geographischen Meile, so bleibt doch immer der Durchmesser des Aequators $\frac{5400}{\pi}$ = 1718,8733855 geogr. Meilen (also sehr genau 1718$\frac{7}{8}$), daher ist der Radius genügend genau = 859,437 Meilen und nach Bessels zweiter (1841 ausgeführter) Rechnung = 6 377 398,07 Meter. Bis jetzt gilt für die Länge einer geographischen Meile noch der Bessel'sche Werth 7420,4396 Meter. Die vorläufigen Ergebnisse der noch nicht abgeschlossenen mitteleuropäischen Gradmessungen deuten auf eine nicht unerhebliche Aenderung in diesem Werth einer geographischen Meile; während die Abplattung nach Bessel $\frac{1}{299,1528}$ ist, wird sie sich wahrscheinlich zu etwa $\frac{1}{289}$ ergeben. Aus diesen Gründen ist es wohl zweckmäßiger, die betreffenden Aufgaben mit geographischen Meilen zu rechnen und das Uebertragen der Resultate in richtige Meterangaben der Zukunft zu überlassen.

sei. Aufl. Messe in C den Elevationswinkel der Spitze $= \alpha$, so ist $x = \frac{a}{\sin\alpha}$. Beisp. $a = 200$; $\alpha = 28^0\,37'\,40''$; $x = 417{,}4341$.

2. Aus der Höhe eines Berges $AB = a$ über einer horizontalen Thalebene die directe Entfernung der Bergspitze B von einem in der Ebene gegebenen Punkt C von der Bergspitze selbst aus zu ermitteln. Aufl. Messe in B den Depressionswinkel von $C = \alpha$, so ist $x = \frac{a}{\sin\alpha}$. Beisp. $a = 2480$; $\alpha = 7^0\,24'$; $x = 19255{,}32$.
3. Aus der Höhe a eines Leuchtthurmes soll von der Spitze aus die horizontale Entfernung eines Schiffes berechnet werden. Aufl. Messe an der Spitze den Depressionswinkel des Schiffes $= \alpha$, so ist $x = a \cot\alpha$. Beisp. $a = 96{,}5$; $\alpha = 2^0\,56'\,50''$; $x = 1874{,}363$.
4. Wie hoch ist ein Gegenstand, wenn die Länge seines Schattens $= a$, während die Sonne α^0 über dem Horizont steht. Aufl. $x = a \operatorname{tg}\alpha$. Beisp. $a = 362$, $\alpha = 16^0$; $x = 103{,}8018$.
5. Die Schattenlänge einer Säule von der Höhe a ist $= b$; wie hoch steht die Sonne? Aufl. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$. Beisp. $a = 12$, $b = 15{,}6$; $\varphi = 37^0\,34'\,6'',93$.
6. Wie lang ist der Schatten eines Thurmes von der Höhe a, wenn die Höhe der Sonne α^0 beträgt. Aufl. $x = a \cot\alpha$. Beisp. $a = 250$, $\alpha = 36^0\,27'$; $x = 338{,}473$.
7. Wie hoch steht die Sonne, wenn der Schatten eines Menschen a) der halben, b) der doppelten Länge desselben gleich ist. Aufl. a) $\operatorname{tg}\varphi = 2$; $\varphi = 63^0\,26'\,5'',81$. b) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$; $\varphi = 26^0\,33'\,54'',18$.
8. Der Schatten einer vertikalen Stange ist um $\frac{1}{m}$ kürzer als die Stange; welche Höhe hat die Sonne? Aufl. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{m}{m-1}$. Beisp. $m = 11$; $\varphi = 47^0\,43'\,34'',73$.
9. Die Höhen zweier Berge über einer Thalebene sind bekannt $= a$ und b; man soll von der Höhe des kleineren aus die directe Entfernung x beider Bergspitzen, sowie die mittlere Entfernung y beider Berge bestimmen. Aufl. Messe von der Spitze des kleineren Berges aus den Elevationswinkel α der Spitze des größeren, so ist $x = \frac{a-b}{\sin\alpha}$, $y = (a-b)\cot\alpha$. Beisp. $a = 983$; $b = 796$; $\alpha = 18^0\,47'\,20''$; $x = 580{,}5973$; $y = 549{,}6584$.
10. Die Höhe der oberen unzugänglichen Abtheilung eines Thurmes unter der Voraussetzung zu berechnen, daß eine horizontale Standlinie an

den Fuß desselben geführt werden kann. Aufl. Messe die Standlinie $= a$, und im Endpunkte derselben die Elevationswinkel für die Endpunkte der unzugänglichen Abtheilung $= \alpha$ und β, so ist $x = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$. Beisp. $a = 187$; $\alpha = 28^0\,45'$; $\beta = 19^0\,57'$; $x = 34{,}71402$.

11. An einem hohen Schornstein von der Höhe a befindet sich in unzugänglicher Höhe ein Riß, welcher nicht bis zur Spitze reicht; die Länge x und Höhe y desselben über dem Boden soll ermittelt werden. Aufl. Von einem beliebigen Standpunkt messe man drei Elevationswinkel, nach der Spitze des Schornsteins $= \alpha$, nach dem Ende des Risses $= \beta$ und nach dem Anfang desselben $= \gamma$, so ist $x = \frac{a \cot\alpha \sin(\beta - \gamma)}{\cos\beta \cos\gamma}$ und $y = a \cot\alpha \operatorname{tg}\gamma$. Beisp. $a = 125$; $\alpha = 68^0\,29'\,48''$; $\beta = 53^0\,16'\,5''$; $\gamma = 48^0\,47'\,12''$; $x = 9{,}742524$; $y = 43{,}13291$.

12. Von der Spitze eines Thurmes von der Höhe a soll die Höhe einer auf derselben Horizontalebene stehenden Säule ermittelt werden. Aufl. Messe von der Spitze des Thurmes die Depressionswinkel zu dem Fuß der Säule $= \alpha$ und zu der Spitze derselben $= \beta$, so ist $x = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \cos\beta}$. Beisp. $a = 67$; $\alpha = 57^0\,49'\,24''$; $\beta = 36^0\,31'\,10''$; $x = 35{,}7855$.

13. Der Abstand zweier übereinander befindlichen Fenster eines Hauses ist $= a$, und die aus ihnen zu einem Punkt des Erdbodens gemessenen Depressionswinkel sind $= \alpha$ und β. Wie weit ist jener Punkt vom Hause entfernt? Aufl. $x = \frac{a \cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$. Beisp. $a = 3$; $\alpha = 28^0\,54'$; $\beta = 26^0\,58'$; $x = 69{,}38533$.

14. In welcher Entfernung erscheint ein Mensch von der Größe a einem andern unter dem Sehwinkel von α^0? Aufl. $x = a \cot\alpha$. Beisp. $a = 1{,}726195$; $\alpha = 2^0$; $x = 49{,}43175$.

15. Unter welchem Sehwinkel erscheint ein Gegenstand von der Höhe a in der Entfernung b? Aufl. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$. Beisp. $a = 5$; $b = 216$; $\varphi = 1^0\,19'\,33'',79$.

16. Unter welchem Sehwinkel erscheint ein Gegenstand von der Höhe a in der Entfernung c, wenn sich das Auge in der Entfernung b über dem Erdboden befindet? Aufl. $\varphi = \lambda + \mu$; $\operatorname{tg}\lambda = \frac{a - b}{c}$, $\operatorname{tg}\mu = \frac{b}{c}$. Beisp. $a = 61$; $b = 1{,}726$; $c = 244$; $\varphi = 14^0\,3'\,34'',02$.

17. Auf welche Entfernung wird man das Schwarze einer Scheibe, dessen Durchmesser $= a$, noch sehen können? Aufl. Die Grenze des Sehwinkels ist $= 40''$, mithin $x = \frac{1}{2} a \cot 20''$, oder wegen der Kleinheit des Winkels auch $x = a \cot 40''$. Beisp. $a = 0{,}2$; $x = 36{,}83264$.

18. In welcher Entfernung scheint eine Allee, deren Breite $= a$, zusammenzulaufen? Aufl. Der Abstand der Bäume wird verschwindend klein, wenn der Sehwinkel $= 40''$; mithin $x = \frac{1}{2} a \cot 20''$. Beisp. $a = 8$; $x = 20626{,}48$.

19. Wie groß ist das Gesichtsfeld eines Fernrohrs von der Länge a und der Weite b, oder der Winkel, welchen die vom Auge des Beobachters an die äußersten Grenzen des Bildes gezogenen Linien einschließen? Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{b}{2a}$. Beisp. $a = 68$; $b = 2{,}48$; $\varphi = 2^0\, 3'\, 21'',76$.

20. Welches ist der Sehwinkel einer Stange, deren Entfernung ihre Länge m mal übertrifft? Aufl. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2m}$. Beisp. $m = 1000$; $\varphi = 0^0\, 3'\, 26'',26$.

21. Wievielmal übertrifft die Entfernung eines Körpers seine wahre Größe, wenn der scheinbare Durchmesser $= \alpha^0$. Aufl. $x = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} \alpha$. Beisp. $\alpha = 0^0\, 1'\, 40''$; $x = 2062{,}648$.

22. Damit ein Gegenstand wahrnehmbar sei, muß seine Entfernung vom Auge mindestens 8 Zoll und seine scheinbare Größe wenigstens $40''$ betragen; wie groß muß also mindestens der Durchmesser eines sichtbaren Gegenstandes sein? Aufl. $x = 16 \operatorname{tg} 20'' = 0{,}0015514$ Zoll.

23. Ein Luftballon mit dem Durchmesser a erscheint in einer Richtung, die mit dem Horizont einen Winkel α bildet, nur noch als Punkt. Die Entfernung x vom Beobachter und die Höhe y desselben über der Erde zu berechnen. Aufl. $x = \frac{1}{2} a \cot 20''$; $y = \frac{1}{2} a \cot 20'' \sin \alpha$; Beisp. $a = 15$, $\alpha = 21^0\, 48'$, $x = 77349{,}3$; $y = 28725{,}046$.

24. Ein Luftballon vom Durchmesser a erhebt sich von dem Orte A in senkrechter Richtung und erscheint nach einiger Zeit einem Beobachter in der Entfernung b von A unter einem Sehwinkel von α^0. Wie hoch ist der Ballon gestiegen? Aufl. $x = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 \cot \frac{1}{2}\alpha^2 - b^2}$. Beisp. $a = 12$; $b = 78{,}5$; $\alpha = 6^0\, 39'\, 20''$; $x = 66{,}9746$.

25. Wie weit erstreckt sich in einer ebenen Gegend die Fernsicht von einem Gegenstand, dessen Höhe $= a$? Aufl. $\cos \varphi = \frac{r}{r + a}$. Beisp. $a = 65^m$, $\varphi = 0^0\, 15'\, 50''$, also der zugehörige Bogen $= 3{,}958335$ Meilen.

26. Aus dem Erdradius r und der geographischen Breite α eines Ortes den Umfang seines Parallelkreises zu berechnen. Aufl. $x = 2\pi r \cos\alpha$. Beisp. $\alpha = 33^0\,33'$, $x = 4517{,}67$ Ml.
27. Wie hoch muß wenigstens ein Berg sein, um in einer Entfernung von a Meilen noch gesehen werden zu können? Aufl. $x = \frac{2 r \sin {}^1/_2 \alpha^2}{\cos\alpha}$ (r Erdradius und α der zum Bogen a gehörende Centriwinkel). Beisp. $a = 20$, $x = 1727,^{m}205$.
28. Fig. 8. Von einem Schiff sieht man, wenn das Auge b Meter über der Meeresfläche erhaben ist, den Gipfel eines Berges, wenn man noch a Meilen von diesem entfernt ist. Wie hoch ist der Berg? Aufl. Der zum Bogen a = AD gehörende Centriwinkel AMB sei $= \alpha$; $\cos\varphi = \frac{r}{r + b}$ und $x = \frac{2 r \sin {}^1/_2 (\alpha - \varphi)^2}{\cos(\alpha - \varphi)}$. Beisp. $b = 10^{m}$, $a = 33{,}3$ Ml., $x = 4390,^{m}99$.
29. Wie hoch muß ein Punkt über der Meeresfläche liegen, von dem aus man den Gipfel eines Berges von der Höhe b Meter in einer Entfernung von a Meilen sehen kann? Aufl. wie 28. Beisp. $b = 5469^{m}$, $a = 50{,}25$ Ml., $x = 929,^{m}2832$.
30. Fig. 9. Die Höhe der Atmosphäre aus der Dauer der Dämmerung zu berechnen. Aufl. Es sei M der Mittelpunkt der Erde, BCD der Aequator und der Kreis AE die Grenze der Erdatmosphäre. Befindet sich nun die Sonne in der Richtung BS, so daß BS der letzte directe Strahl ist, welchen B von der Sonne erhält, so verschwindet die Dämmerung in D, indem A der letzte Punkt der Atmosphäre ist, welcher nach D hin diffuses Licht reflectiren kann. Da nun unter dem Aequator zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche die Dämmerung $1^h\,12'$ dauert, so wird bei der Rotation der Erde der Punkt B ebenfalls in $^6/_5$ Stunden von B nach D gelangen; so daß also $\angle$ DMB $= 18^0$, oder $\angle$ DMA = AMB $= 9^0$. Nun ist $AM = \frac{r}{\cos 9^0}$, oder $AC = \frac{r}{\cos 9^0} - r = \frac{2 r \sin 4^0\,30'^2}{\cos 9^0}$. Nimmt man $r = 859{,}437$ Meilen, so erhält man die gesuchte Höhe der Erdatmosphäre $AC = 10{,}713$ Meilen.

Wollte man die Dauer der Dämmerung in irgend einem anderen Punkt der Erde außerhalb des Aequators der Rechnung zu Grunde legen, so hätte man zunächst mit Hülfe der geographischen Breite die Anzahl der Grade zu berechnen, welche beim Ende der Dämmerung die Sonne unter den Horizont herabgesunken ist.

b) Aufgaben, welche auf die zweite Höhenaufgabe zurückzuführen sind oder mit ihr in Zusammenhang stehen.

31. Zwei Punkte befinden sich mit dem Fuße eines Thurmes von der Höhe a auf derselben Horizontalebene und in gerader Linie, und werden von der Spitze des Thurmes unter den Depressionswinkeln α und β gesehen. Wie weit sind die Punkte von einander entfernt? Aufl. $x = \frac{a \sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$. Beisp. $a = 68,15$; $\alpha = 28^0\ 24'$; $\beta = 61^0\ 33'$; $x = 89,11533$.

32. Die von dem obersten und untersten Punkt eines leuchtenden Gegenstandes über die Spitze einer vertikalen Stange von der Länge a fallenden Strahlen bilden mit der Horizontalebene durch den Fußpunkt der Stange die Neigungswinkel α und β; wie lang ist der Halbschatten der Stange? Aufl. $x = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$. Beisp. $a = 5$; $\alpha = 53^0\ 18'$; $\beta = 41^0\ 29'$; $x = 1,9279$.

33. Ueber die Spitze einer vertikalen Stange von der Höhe a fallen die oberen Randstrahlen der Sonne, deren Sehwinkel $= \alpha$, unter $\angle\ \beta$ ein; wie lang ist der Halbschatten der Stange? Aufl. $x = \frac{a \sin\alpha}{\cos(\alpha + \beta) \cos\beta}$. Beisp. $a = 5,5$; $\alpha = 32'\ 1'',8$; $\beta = 36^0\ 47'$; $x = 0,08045106$.

34. Der Sehwinkel, unter dem ein Luftballon von der Höhe a erscheint, ist $= \alpha$ und der Elevationswinkel der Gondel $= \beta$. Zu berechnen ist die Höhe x der Gondel über der Erde und ihre Entfernung y vom Beobachter. Aufl. $x = \frac{a \sin\beta \cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}$, $y = \frac{a \cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}$. Beisp. $a = 20$; $\alpha = 1^0\ 48'$; $\beta = 48^0\ 30'$: $x = 304,6146$; $y = 406,7192$.

35. **Fig. 10.** Die Höhe $CD = x$ eines in eine Thalebene hervorspringenden Bergrückens und sein Durchmesser $EA = y$ zwischen zwei gegebenen Punkten E und A soll wegen Führung eines Tunnels durch denselben ermittelt werden. Vorausgesetzt wird, daß die Bergspitze C zugänglich sei, mit EA in derselben Vertikalebene liege, und daß man von derselben die Punkte E und A sehen kann. Aufl. Messe von C aus eine in der Verlängerung von EA liegende Standlinie $AB = a$; ferner in C die Depressionswinkel für A, B und E resp. $= \alpha$, β und γ, so ist $x = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ und $y = \frac{a \sin\beta \sin(\alpha + \gamma)}{\sin\gamma \sin(\alpha - \beta)}$. Beisp. $a = 224$; $\alpha = 63^0\ 17'\ 25''$; $\beta = 21^0\ 43'\ 16''$; $\gamma = 44^0\ 51'\ 53''$; $x = 111,6074$; $y = 168,292$.

36. **Fig. 11.** Unter ähnlichen Umständen wie in 35 soll der Durchmesser AB = y eines Berges in einer gewissen Richtung gemessen werden; jedoch mit dem Unterschied, daß man von der Spitze C des Berges nicht die beiden Punkte A und B sehen kann, sondern nur den einen A. Aufl. Messe von A aus die Standlinie AE = a, und von B aus die Standlinie BF = b; ferner in C die Depressionswinkel nach A und E resp. = α und β. Dann wähle einen mit AB in derselben Vertikalebene liegenden Punkt G so, daß von ihm aus sowohl C, wie B und F gesehen werden können, messe in G den Elevationswinkel nach C = γ, und die Depressionswinkel nach B und F resp. = δ und ε. Von G ziehe eine Parallele GL zu AB, und von C und G die Lothe CD und GH auf AB, so ist $CD = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$, $GH = \frac{b \sin\delta \sin\varepsilon}{\sin(\delta - \varepsilon)}$; und folglich $AD = \frac{a \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ (1) und $BH = \frac{b \cos\delta \sin\varepsilon}{\sin(\delta - \varepsilon)}$ (2); $CL = CD - GH$ und $LG = CL \cot\gamma$ (3). Aus (1), (2) und (3) findet man $y = AB = AD + LG + BH$ $= \frac{a \sin\beta \sin(\alpha + \gamma)}{\sin\gamma \sin(\alpha - \beta)} - \frac{b \sin\varepsilon \sin(\delta - \gamma)}{\sin\gamma \sin(\delta - \varepsilon)}$.

37. **Fig. 12.** Zwei Punkte A und B, welche auf verschiedenen Seiten eines Berges in derselben Vertikal-, jedoch nicht in derselben Horizontalebene liegen, sollen durch einen Tunnel verbunden werden. Die Entfernung AB und das Steigungsverhältniß des Tunnels soll berechnet werden, wenn man von der Spitze C, welche mit A und B in derselben Vertikalebene liegt, beide Punkte sehen kann. Aufl. Messe in A und B die horizontalen Standlinien AE = a und BF = b; ferner in C die Depressionswinkel für A, E, B und F resp. = α, β, γ, δ. Dann ist $CD = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ (1); $AD = \frac{a \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ (2); $CL = \frac{b \sin\gamma \sin\delta}{\sin(\gamma - \delta)}$ (3); $DG = BL = \frac{b \cos\gamma \sin\delta}{\sin(\gamma - \delta)}$ (4). Aus (1) und (3) ergiebt sich $BG = LD = CD - CL$ (5); und aus (2) und (4) $AG = AD + DG$ (6). Mithin $AB = \sqrt{BG^2 + AG^2}$ (7) und das Steigungsverhältniß $= \frac{BG}{AG}$ (8). Beisp. a = 420; b = 612; $\alpha = 45^0\ 28'\ 30''$; $\beta = 33^0\ 54'\ 20''$; $\gamma = 39^0\ 57'\ 10''$; $\delta = 27^0\ 19'\ 40''$; CD = 832,854; AD = 819,158; CL = 825,4523; BL = 985,384; BG = 7,4017; AG = 1804,542; AB = 1804,557; Steigungsverhältniß $= \frac{1}{244}$.

c) Aufgaben, welche auf die dritte Höhenaufgabe zurückzuführen sind.

38. Die Höhe, in welcher ein Luftballon schwebt, durch trigonometrische Messung zu bestimmen. Aufl. Fig. 3. Messe eine Standlinie AB $= a$; in jedem Endpunkt stelle sich ein Beobachter mit einem Theodolithen auf und verfolge mit dem Fernrohr den Ballon P. Auf ein verabredetes Zeichen messe der Beobachter in A den Höhenwinkel PAQ $= \alpha$; gleichzeitig müssen nun sofort beide Beobachter das Fernrohr herabschlagen und die Horizontalwinkel QAB $= \gamma$ und QBA $= \delta$ messen. Dann ist, wie in der dritten Höhenaufgabe, $PQ = x = \frac{a \operatorname{tg} \alpha \sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$. Beisp. $a = 483$; $\alpha = 15^0\,26'$; $\gamma = 31^0\,37'$; $\delta = 98^0\,14'$; $x = 173{,}289$.

39. Die Höhe einer Wolke durch trigonometrische Messungen zu bestimmen. Aufl. wie 38.

d) Auf die fünfte Höhenaufgabe ist folgende Aufgabe zurückzuführen.

40. Die Höhe eines Thurmes zu messen, welcher auf einem Abhange steht, wenn man vom Fußpunkt des Thurmes den Abhang hinab eine Standlinie messen kann. Aufl. Fig. 5. Die Höhe des Thurmes sei PP' $= x$, und die den Abhang herab gemessene Standlinie AP' $= a$, B die Mitte derselben. Messe in A und B die Winkel PAP' $= \alpha$ und PBP' $= \beta$, so ist $PB = \frac{a \sin \alpha}{2 \sin(\beta - \alpha)}$; vom △ PBP' kennt man also zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, kann also die übrigen Stücke berechnen. Beisp. $a = 134$; $\alpha = 32^0\,45'$; $\beta = 56^0\,56'$; $x = 156{,}1605$.

40a. B braucht nicht in der Mitte von AP' zu liegen, sondern kann bestimmt sein durch AB $= a$ und BP' $= b$. Die Auflösung ist ganz dieselbe. Beisp. $a = 20$; $b = 16$; $\alpha = 52^0\,27'$; $\beta = 76^0\,11'$; $x = 38{,}8205$.

41. Die Höhe eines Thurmes von einem Bergabhang aus zu messen, welcher höher als der Fußpunkt, aber niedriger als die Spitze des Thurmes liegt, und wenn vorausgesetzt wird, daß man den Berg hinab eine Standlinie so messen kann, daß ihre Verlängerung durch den Fußpunkt des Thurmes geht. Aufl. Fig. 5. Es sei PP'' $= x$ der Thurm, AB' $= a$ die den Bergabhang herab gemessene Standlinie. Messe in A und B' die Elevationswinkel der Thurmspitze PAQ $= \alpha$ und PB'R' $= \beta$; ferner in einem beliebigen Punkt der Standlinie, z. B. in A, den Depressionswinkel des Fußpunktes P'' des Thurmes, also QAP'' $= \gamma$. Dann ist im △ PAB': $AP = \frac{a \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}$, und im △ PAP'' ist $PP'' = \frac{AP \sin(\alpha + \gamma)}{\cos \gamma}$

$= \frac{a \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \alpha) \cos\gamma}$. Beisp. $a = 47$; $\alpha = 31^0\,46'\,50''$; $\beta = 58^0\,51'\,20''$; $\gamma = 1^0\,58'\,10''$; $x = 50{,}12035$.

e) Vermischte Höhenaufgaben.

42. **Fig. 13.** An einem Standpunkt A erscheint eine Wolke C, deren Höhe CD über der Erde $= b^m$, in nordöstlicher Richtung unter dem Elevationswinkel α. Unter welchem Elevationswinkel erscheint in demselben Augenblick die Wolke an einem Standpunkt B, der a^m nördlich vom ersten A liegt? Aufl. Es sei der gesuchte Elevationswinkel CBD $= \varphi$. Es ist AD $= b \cot\alpha$; dann kennt man vom Dreieck BAD zwei Seiten AB und AD und den eingeschlossenen Winkel BAD $= 45^0$, welchen die nördliche und nordöstliche Richtung bilden, kann also BD berechnen; mithin $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{BD}$. Beisp. $a = 10000$; $b = 5000$; $\alpha = 33^0\,49'\,40''$; $\varphi = 35^0\,13'\,24'',16$.

43. Unter ähnlichen Bedingungen, wie in der vorigen Aufgabe soll die Höhe CD der Wolke C ermittelt werden, wenn die Entfernung a der beiden Standorte A und B bekannt ist und in beiden gleichzeitig die Elevationswinkel der Wolke resp. $= \alpha$ und β beobachtet werden. Aufl. Es sei CD $= x$; so ist BD $= x \cot\beta$ und AD $= x \cot\alpha$; mithin im $\triangle$ ABD: $x^2 \cot\beta^2 = a^2 + x^2 \cot\alpha^2 - 2ax \cot\alpha \cos 45^0$, oder $x^2 - \frac{a\sqrt{2} \cot\alpha \sin\alpha^2 \sin\beta^2}{\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha)} x + \frac{a^2 \sin\alpha^2 \sin\beta^2}{\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha)} = 0$.

44. **Fig. 14.** In zwei Punkten A und B, deren Entfernung $= a$, wird gleichzeitig das Steigen eines Luftballons beobachtet; zu einer bestimmten Zeit findet man in A den Elevationswinkel α und ONO-Richtung, in B den Elevationswinkel β und NO-Richtung. Wie hoch ist der Ballon gestiegen? Aufl. Es sei die gesuchte Höhe CD $= x$; AE und BF mögen die östliche Richtung in den Punkten A und B vorstellen; so ist $\angle$ DAE $= 22^0\,30'$ und $\angle$ DBF $= 45^0$; mithin $\angle$ DAB + ABD = DAE + EAB + ABF − DBF $= 22^0\,30' + 180^0 - 45^0 = 180^0 - 22^0\,30'$; also $\angle$ ADB $= 22^0\,30'$; und da AD $= x \cot\alpha$ und BD $= x \cot\beta$, so sind im $\triangle$ ABD die Winkel DAB und ABD zu berechnen, da $\frac{\sin DBA}{\sin DAB} = \frac{AD}{BD} = \frac{\cot\alpha}{\cot\beta}$ und DBA + DAB $= \frac{3}{4}\pi$, mithin $\frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\cot\alpha - \cot\beta} = \frac{\cot 11^0\,15'}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(ABD - BAD)}$ oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(ABD - BAD) = \frac{\cot 11^0\,15' \sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}$; dann AD oder BD und x.

45. Die Höhe eines Thurmes DE zu berechnen, wenn man in der Horizontalebene des Fußpunktes E eine beliebige Standlinie AB, und von den Endpunkten A und B, sowie von irgend einem andern Punkt C derselben die Elevationswinkel der Thurmspitze D messen kann. Aufl. Gemessen sei $AC = a$, $BC = b$, $\angle DAE = \alpha$, $\angle DCE = \gamma$, $\angle DBE = \beta$; gesucht $DE = x$. Es ist $\cos ECA = \frac{a^2 + x^2 \cot\gamma^2 - x^2 \cot\alpha^2}{2\,ax \cot\gamma}$ und $\cos ECB = -\cos ECA = \frac{b^2 + x^2 \cot\gamma^2 - x^2 \cot\beta^2}{2\,bx \cot\gamma}$; aus beiden ergiebt sich $x^2(a(\cot\beta^2 - \cot\gamma^2) + b(\cot\alpha^2 - \cot\gamma^2)) = ab(a+b)$, mithin $x = \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sqrt{ab(a+b)}}{\sqrt{(b \sin\beta^2 \sin(\alpha+\gamma)\sin(\gamma-\alpha) + a \sin\alpha^2 \sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma-\beta))}}$.

46. **Fig. 15.** Zwei durch ein Thal getrennte Anhöhen A und B sollen durch einen Eisenbahnviaduct verbunden werden. Man kennt die Höhe a des Punktes A und die Höhe b des Punktes B über einem Punkt E im Thale. Es soll die Länge $AB = x$ und das Steigungsverhältniß des Viaducts ermittelt werden. Aufl. Man denke sich auf die durch E gelegte Horizontalebene die Lothe $AC = a$ und $BD = b$ gefällt, messe in E den Horizontalwinkel $CED = \gamma$, und die Höhenwinkel $AEC = \alpha$ und $BED = \beta$, so ist $CE = a \cot\alpha$ und $ED = b \cot\beta$; mithin kennt man vom $\triangle CED$ zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, kann also $CD = AF$ berechnen. Dann ist $x = \sqrt{AF^2 + (b-a)^2}$ und das Steigungsverhältniß $= \frac{b-a}{AF}$.

47. **Fig. 16.** Die Höhe eines Berges $CD = x$ zu berechnen, wenn man von dem Gipfel D desselben zwei Punkte A und H sehen kann, von denen der eine A in der Horizontalebene liegt; und wenn man ferner die Höhe $HB = b$ des Punktes H über der Horizontalebene und die Standlinie $AB = a$ messen kann. Aufl. Messe in D die Depressionswinkel für A und H, $GDA = DAC = \delta$, $EDH = FHD = \varepsilon$ (wenn $FH \parallel DE$) und $\angle GDE = ACB = \gamma$. Bezeichnen wir noch $\angle BAC = \alpha$ und $ABC = \beta$, so ist $x = AC \operatorname{tg}\delta$ und $x - b = BC \operatorname{tg}\varepsilon$; da nun $AC = \frac{a \sin\beta}{\sin\gamma}$ und $BC = FH = \frac{a \sin\alpha}{\sin\gamma}$, so ist $x = \frac{a \sin\beta \operatorname{tg}\delta}{\sin\gamma}$ und $x - b = \frac{a \sin\alpha \operatorname{tg}\varepsilon}{\sin\gamma}$; mithin $\frac{b}{a} \sin\gamma = \sin\beta \operatorname{tg}\delta - \sin\alpha \operatorname{tg}\varepsilon$; wird nun $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\zeta$ und $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$ gesetzt, so ist $\sin\gamma \operatorname{tg}\zeta =$

$\sin\gamma \operatorname{tg}\delta \left(\sin\alpha \frac{\cos\gamma \operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varepsilon}{\sin\gamma \operatorname{tg}\delta} + \cos\alpha\right)$; durch die Substitution $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\gamma \operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varepsilon}{\sin\gamma \operatorname{tg}\delta}$ (1) erhalten wir $\cos(\alpha - \varphi) = \operatorname{tg}\zeta \cot\delta \cos\varphi$ (2). Aus (1) ist φ, aus (2) α und dann BC, x — b und so x zu berechnen.

48. **Fig. 17.** Am Ufer eines Sees steht ein Thurm, dessen Höhe = a bekannt; von der Spitze desselben erblickt man eine Wolke und gleichzeitig ihr Spiegelbild im See; die Höhe der Wolke über dem See, sowie ihre Entfernung vom Beobachtungsort ist zu berechnen. Aufl. Es sei AB = a der Thurm, D die Wolke, also DE ihre Höhe, und in der Richtung AC sehe man von A ihr Spiegelbild. Dann messe in A $\angle$ CAD = β und $\angle$ BAC = α, ist CF die Normale in C, so ist auch $\angle$ ACF = FCD = CDE = α. Gesucht wird DE = x und AD = y. Es ist $AC = \frac{a}{\cos\alpha}$; $DC = \frac{AC \sin\beta}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{a \sin\beta}{\cos\alpha \sin(2\alpha + \beta)}$; mithin $x = DC \cos\alpha = \frac{a \sin\beta}{\sin(2\alpha + \beta)}$; und $y = \frac{CD \sin 2\alpha}{\sin\beta} = \frac{2a \sin\alpha}{\sin(2\alpha + \beta)}$; $BE = \frac{2a \sin\alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + \beta)}$.

49. **Fig. 18.** Dieselbe Aufgabe wie 48, nur unter der Bedingung, daß die Entfernung BE so groß ist, daß sie wegen der Kugelgestalt der Erde nicht mehr als gerade Linie, sondern als Kreisbogen angesehen werden muß. Aufl. Es sei M der Mittelpunkt der Erde; MB = MC = ME = r der Erdradius; AB = a die bekannte Höhe des Thurmes; gemessen seien die Winkel DAC = β und CAB = γ; wir bezeichnen ACF = FCD = α und BME = φ. Dann ist im $\triangle$ ACM: $\frac{r + a}{r} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$, also $\sin\alpha = \frac{(r + a)\sin\gamma}{r}$ (1); ferner $AC = \frac{r \sin(\alpha - \gamma)}{\sin\gamma}$; mithin $y = \frac{AC \sin 2\alpha}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{r \sin(\alpha - \gamma) \sin 2\alpha}{\sin\gamma \sin(2\alpha + \beta)}$; und $CD = \frac{AC \sin\beta}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{r \sin(\alpha - \gamma) \sin\beta}{\sin\gamma \sin(2\alpha + \beta)}$. Man kennt also im $\triangle$ MCD zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, kann also r + x und dann auch φ als Summe zweier Winkel berechnen.

50. **Fig. 19.** Ein Schiff, dessen Mast CD ist, segelt mit einer bekannten gleichförmigen Geschwindigkeit von D nach D′. Von einem Punkte A aus, der sich in der Höhe AE = a über dem Horizont befindet, erblickt man in der Richtung AB das Spiegelbild der Mastspitze C und mißt den Winkel BAE = α. Ist nach einer bestimmten Zeit das Schiff in D′ angelangt, so erblickt man das Spiegelbild der

Mastspitze C′ in der Richtung AB′ und mißt den Winkel $B'AE = \alpha'$. Wie hoch ist der Mast des Schiffes $CD = x$, und wie weit ist es in D und D′ von E entfernt, oder wie groß ist $DE = y$ und $D'E = y'$? Aufl. Es sei die bekannte Strecke $DD' = b$. Sind F und F′ die Spiegelbilder der Mastspitzen, so ist $CD = DF$ und $\angle BCF = CFB = \alpha$, $\angle B'C'F' = C'F'B' = \alpha'$. Im $\triangle AFF'$ ist $AF = \frac{b \cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$, mithin $x + a = AF \cos\alpha = \frac{b \cos\alpha \cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$; ferner $y = \frac{b \sin\alpha \cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$ und $y' = \frac{b \sin 2\alpha'}{2 \sin(\alpha' - \alpha)}$.

51. Die ähnliche Aufgabe wie 50, nur daß die Höhe des Mastes $CD = c$ bekannt, man in C und C′ die Spiegelbilder des Punktes A beobachtet und die Winkel $BCD = \alpha$ und $B'C'D' = \alpha'$ gemessen hat. Gesucht wird die Höhe $AE = x$ des Punktes A über dem Horizont und die Entfernungen $DE = y$ und $D'E = y'$. Aufl. Wie in 50 ist $x = \frac{b \cos\alpha \cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)} - c$; $y = \frac{b \sin\alpha \cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$; $y' = \frac{b \sin 2\alpha'}{2 \sin(\alpha' - \alpha)}$.

52. Die ähnliche Aufgabe wie 51, nur daß von dem stillstehenden Schiff, dessen Mast $CD = c$, die Höhe $AE = x$ des Punktes A über dem Horizont berechnet werden soll, sowie die Entfernung $DE = y$. Aufl. Steige von der Mastspitze C eine Strecke $CG = d$ herab, beobachte in C und G die Spiegelbilder des Punktes A und messe die Winkel $DCB = \alpha$ und $DGB' = \alpha'$. Dann ist im $\triangle AFG'$: $AF = \frac{d \sin\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$; ferner $x = \frac{d \sin\alpha' \cos\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)} - c$; $y = \frac{d \sin\alpha \sin\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$.

§. 42.

Aufgaben über Distanzmessungen.

1. Die Entfernung eines unzugänglichen Punktes P vom Standort A zu bestimmen. Aufl. Messe in der durch A gehenden Horizontalebene eine Standlinie $AB = a$, und in A und B die Horizontalwinkel $BAP = \alpha$ und $ABP = \beta$, so ist $AP = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

2. Die Entfernung zweier Punkte P und P′ zu ermitteln, zu denen man wohl gelangen, die man aber wegen zwischenliegender Hindernisse nicht unmittelbar messen kann. Aufl. Es sei A ein Punkt, von dem aus man P und P′ sowohl messen, wie sehen kann; und man habe gefunden $AP = a$, $AP' = b$ und $\angle PAP' = \alpha$, so daß man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt.

3. Ein Punkt P soll seiner Lage nach bestimmt werden, wenn die Lage zweier anderen Punkte A und B bestimmt ist, und wenn man von P nach A und B wohl sehen aber nicht messen kann; wenn man ferner von einem in der Verlängerung von AB über B liegenden Punkt C alle übrigen Punkte sehen kann (Seitwärts-Einschneiden). Aufl. Es sei AB = a, $\angle$ APB = α, $\angle$ BPC = β und $\angle$ PCB = γ gemessen. Dann ist $AP = \frac{a \sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha}$, $BP = \frac{a \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \alpha}$.
4. Die Entfernung zweier unzugänglichen Punkte P und P′ von einander und vom Standort der Messung zu bestimmen, wenn die Standlinie AB = a so gewählt werden kann, daß ihr einer Endpunkt A in der Verlängerung von PP′ liegt. Aufl. Es seien $\angle$ BAP = α, $\angle$ ABP = β, $\angle$ ABP′ = β' die gemessenen Winkel. Dann ist $BP = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$; $x = \frac{BP \sin(\beta' - \beta)}{\sin(\alpha + \beta')} = \frac{a \sin \alpha \sin(\beta' - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta')}$.
5. Die Entfernung zweier unzugänglichen Punkte P und P′ von einander und vom Standort A der Messung zu bestimmen, wenn eine Standlinie AB = a so gewählt werden kann, daß man von A und B aus sowohl diese Punkte gegenseitig, als auch die Punkte P und P′ sehen kann, und daß ferner A und B auf derselben Seite von PP′ liegen (Vorwärts-Einschneiden). Aufl. In A seien die Winkel PAB = α und P′AB = α', und in B die Winkel ABP = β und ABP′ = β' gemessen, so ist $AP = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; $AP' = \frac{a \sin \beta'}{\sin(\alpha' + \beta')}$. Man kennt nun vom $\triangle$ PAP′ zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, kann also PP′ = x berechnen.
6. Dieselbe Aufgabe wie 5, nur ist man genöthigt, die Standlinie AB = a zwischen den beiden unzugänglichen Punkten P und P′ abzumessen. Aufl. wie 5.
7. Die Entfernungen dreier unzugänglichen Punkte A, B und C zu berechnen, wenn man auf der Verlängerung von AB über B den Punkt D und auf der von AC über C den Punkt E annehmen, DE messen und von D und E aus alle Punkte sehen kann. Aufl. Es sei DE = a; $\angle$ BDE = α, $\angle$ CDE = β; $\angle$ BED = γ; $\angle$ CED = δ. Dann ist $CD = \frac{a \sin \delta}{\sin(\beta + \delta)}$; $BE = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$; $AC = \frac{CD \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \delta)} = \frac{a \sin \delta \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta + \delta) \sin(\alpha + \delta)}$; $AB = \frac{BE \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\alpha + \delta)} = \frac{a \sin \alpha \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma) \sin(\alpha + \delta)}$. Im $\triangle$ ABC kennt man jetzt zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel BAC = $\pi - (\alpha + \delta)$, kann also BC berechnen.

8. Fig. 20. Die Höhe CE = y und DF = z zweier Berge, den horizontalen Abstand EF = x ihrer Spitzen C und D mit Hülfe einer Standlinie AB = a zu ermitteln, die zwar horizontal, aber nicht in einer Ebene mit beiden Berggipfeln gelegt werden kann. Aufl. CE und DF seien die von C und D gefällten Lothe auf eine durch AB gelegte Horizontalebene. In A messe den Höhenwinkel CAE = α, und die Horizontalwinkel EAF = γ, EAB = δ; und in B den Höhenwinkel DBF = β, und die Horizontalwinkel FBE = ε und FBA = ζ. Dann ist $AE = \frac{a \sin(\zeta - \varepsilon)}{\sin(\delta + \zeta - \varepsilon)}$; $BF = \frac{a \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\delta - \gamma + \zeta)}$; mithin $y = \frac{a \sin(\zeta - \varepsilon) \operatorname{tg} \alpha}{\sin(\delta + \zeta - \varepsilon)}$ und $z = \frac{a \sin(\delta - \gamma) \operatorname{tg} \beta}{\sin(\delta - \gamma + \zeta)}$. Ferner $BE = \frac{a \sin \delta}{\sin(\delta + \zeta - \varepsilon)}$; wir kennen also vom $\triangle$ BFE zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ε, können also EF = x berechnen. Die directe Entfernung CD ergiebt sich dann auch leicht.

9. Hansen'sche Aufgabe. Fig. 21. Die Entfernung zweier Punkte A und B, welche von einander sichtbar sind, zu bestimmen, wenn dieselbe nicht direct gemessen werden kann, wenn man aber von A und B aus zwei Punkte C und D, deren Entfernung CD = a bekannt, sehen, jedoch von A und B aus nicht nach C und D messen kann. Aufl. Es sei $\angle$ CAD = α, CAB = β, ABD = γ, CBD = δ gemessen, und $\angle$ ACD = φ und BDC = ψ bezeichnet. Dann ist $AD = \frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{x \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$, also $\sin \varphi = \frac{x \sin \alpha \sin \gamma}{a \sin(\alpha + \beta + \gamma)}$; ferner $BC = \frac{a \sin \psi}{\sin \delta} = \frac{x \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}$, also $\sin \psi = \frac{x \sin \beta \sin \delta}{a \sin(\beta + \gamma + \delta)}$; folglich $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \alpha \sin \gamma \sin(\beta + \gamma + \delta)}{\sin \beta \sin \delta \sin(\alpha + \beta + \gamma)}$ und $\varphi + \psi = \beta + \gamma$ (§. 7, 1). Dann ist AD, und hierdurch AB zu berechnen.

10. Centriren der Winkel. Fig. 22. Die Entfernungen zweier Orte A und B von einem dritten Ort C sind bekannt; man kann aber das Winkelinstrument nicht in C aufstellen, um den Zwischenwinkel ACB = φ zu messen. Wie läßt sich dieser Winkel dennoch ermitteln? Aufl. Wähle in der Nähe von C den Punkt D, dessen Entfernung von C = c bekannt, und von dem aus man nach A und B visiren kann, messe also die Winkel BDC = α und ADB = β; ferner bezeichne $\angle$ CAD = λ und CBD = μ, so ist $\sin \lambda = \frac{c \sin(\alpha + \beta)}{b}$; $\sin \mu = \frac{c \sin \alpha}{a}$; $\varphi = \beta + \lambda - \mu$.

11. Pothenot'sche Aufgabe (§. 37, 212). **Fig. 23.** $\triangle$ ABC ist durch a, b, γ gegeben; man kennt außerdem die Winkel α und β, welche die von P nach den Ecken des Dreiecks gezogenen Linien mit einander bilden, nämlich $\angle$ BPC $= \alpha$ und APC $= \beta$. Es soll daraus die Lage des Punktes P berechnet werden (Rückwärts-Einschneiden). 1. Aufl. Bezeichnen wir $\angle$ CBP $= \varphi$ und CAP $= \psi$, so ist $\sin\psi = \frac{PC \sin\beta}{b}$; $\sin\varphi = \frac{PC\sin\alpha}{a}$; also $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha}$; und $\varphi + \psi = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ (§. 7, 1). 2. Aufl. $\varphi + \psi = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \sigma$, also $\psi = \sigma - \varphi$, mithin $\sin\psi = \sin(\sigma - \varphi) = \sin\sigma\cos\varphi - \cos\sigma\sin\varphi$; also $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \sin\sigma\cot\varphi - \cos\sigma = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$; mithin $\cot\varphi = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha\sin\sigma} + \cot\sigma$. Aus beiden Auflösungen folgt dann $PA = \frac{b\sin(\beta+\psi)}{\sin\beta}$; $PB = \frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}$; $PC = \frac{a\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{b\sin\psi}{\sin\beta}$. 3. Aufl. **Fig. 24.** E und F seien die Mittelpunkte der um resp. ACP und BCP beschriebenen Kreise; ihre Radien seien EC $= r$ und FC $= r'$; ferner bezeichnen wir $\angle$ CFE $= \lambda$ und CEF $= \lambda'$. Dann ist $r = \frac{b}{2\sin\beta}$; $r' = \frac{a}{2\sin\alpha}$; und wenn EH senkrecht AC gefällt wird, $\angle$ CEH $= \beta$, also $\angle$ ECH $= \frac{1}{2}\pi - \beta$ und FCB $= \frac{1}{2}\pi - \alpha$; mithin $\lambda + \lambda' = \pi - \gamma + \frac{1}{2}\pi - \beta + \frac{1}{2}\pi - \alpha = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Im $\triangle$ ECF ist $\frac{r + r'}{r - r'} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\lambda + \lambda')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\lambda - \lambda')}$; wird $\frac{r'}{r} = \cos\mu$ gesetzt, so ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\lambda - \lambda') = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\lambda + \lambda')\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mu^2$; man kann also λ und λ' berechnen. Nun ist $CP = 2r\sin\lambda' = \frac{b\sin\lambda'}{\sin\beta}$; $AP = \frac{b\sin(\beta + \lambda')}{\sin\beta}$; $BP = -\frac{a\sin(\gamma + \beta + \lambda')}{\sin\alpha}$. Zur Bestimmung der Richtung von CP dienen die Winkel ACP oder BCP, die man auf folgende Weise bestimmen kann: Die Centrale EF steht senkrecht auf der gemeinschaftlichen Sehne CP, also $\angle$ ECP $= \lambda' - \frac{1}{2}\pi$; $\angle$ ACP $=$ ECH $-$ ECP $= \frac{1}{2}\pi - \beta - \lambda' + \frac{1}{2}\pi = \pi - (\beta + \lambda')$; und $\angle$ BCP $= \gamma -$ ACP $= \gamma + \beta + \lambda' - \pi$.

Besondere Fälle. a) Besondere Lage von P. 1. Liegt P auf der Peripherie des um $\triangle$ ABC beschriebenen Kreises, so ist die Aufgabe unbestimmt. 2. Liegt P innerhalb von $\triangle$ ABC, so

sind die Formeln dieselben. 3. P liegt auf AB; da $\alpha + \beta = \pi$, so braucht nur einer von beiden Winkeln gegeben zu sein; dann ist $\varphi + \psi = \pi - \gamma$ und $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha}$ (§. 7, 1); $AP = \frac{b \sin(\alpha - \psi)}{\sin\beta}$; $BP = \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\sin\alpha}$; $CP = \frac{b \sin\psi}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\varphi}{\sin\alpha}$. b) Besondere Lage von C. 4. C liegt von AB aus nach P zu. In den obigen Formeln ist $2\pi - \gamma$ für γ zu setzen, so daß $\varphi + \psi = \gamma - (\alpha + \beta)$ ist. 5. C liegt auf der geraden Linie zwischen A und B; dann ist $\gamma = \pi$, mithin $\varphi + \psi = \pi - (\alpha + \beta)$. 6. CP trifft nicht AB selber, sondern ihre Verlängerung über B, dann ist $-\alpha$ für α und $2\pi - \varphi$ für φ zu setzen, so daß $2\pi - \varphi + \psi = 2\pi - (\beta + \gamma - \alpha)$ oder $\varphi - \psi = \beta + \gamma - \alpha$ und $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$ ist, also §. 7, 2.

12. Man kennt $\triangle$ ABC durch a, b, γ, und kann außerdem Punkt P, der wie in Fig. 23 liegt, von A und B visiren; die Lage des Punktes P ist zu bestimmen. 1. Aufl. Es sei gemessen $\angle$ CAP $= \alpha$ und $\angle$ CBP $= \beta$; zunächst wird es darauf ankommen, $\angle$ APC $= \varphi$ und $\angle$ CPB $= \psi$ zu berechnen, da sich alsdann AP, BP und CP ohne Weiteres berechnen lassen. $\varphi + \psi = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ und $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$ (§. 7, 1). 2. Aufl. $\varphi + \psi = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \sigma$; $\psi = \sigma - \varphi$; $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \sin\sigma \cot\varphi - \cos\sigma$; also $\cot\varphi = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \sin\sigma} + \cot\sigma$. 3. Aufl. Nach Berechnung von $\triangle$ ABC kennt man AB, $\angle$ BAP und $\angle$ ABP, kann also $\triangle$ ABP, und dann die Dreiecke CAP und CBP berechnen.

13. **Fig. 25.** In einer Ebene liegen die fünf Punkte A, B, C, D, E. Man kennt die Strecken AB $=$ a und BC $=$ b; ferner hat man die Winkel AEB $= \alpha$, BEC $= \beta$, ADB $= \alpha'$, BDC $= \beta'$ und EBD $= \gamma$ gemessen. Wie groß ist die Strecke ED $=$ z? Aufl. Man setze BE $=$ x, BD $=$ y, $\angle$ BAE $= \varphi$ und $\angle$ BCD $= \psi$, so erhält man zur Bestimmung dieser vier Unbekannten folgende vier Gleichungen: $\frac{x}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{x} = \frac{\sin\beta}{\sin(\psi + \beta' - \beta - \gamma)}$, $\frac{y}{b} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta'}$, $\frac{a}{y} = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\varphi + \alpha - \alpha' - \gamma)}$; setzt man $\beta' - \beta - \gamma = \delta$ und $\alpha - \alpha' - \gamma = \varepsilon$ und multiplicirt je zwei dieser Gleichungen, so erhält man: $\frac{b}{a} = \frac{\sin\varphi \sin\beta}{\sin\alpha \sin(\psi + \delta)}$

und $\frac{a}{b} = \frac{\sin\psi \sin\alpha'}{\sin\beta' \sin(\varphi + \varepsilon)}$, oder $\sin(\psi + \delta) = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha} \sin\varphi$ und $\sin\psi = \frac{a \sin\beta'}{b \sin\alpha'} \sin(\varphi + \varepsilon)$. Setzen wir hierin $\psi + \frac{1}{2}\delta = \lambda$, $\varphi + \frac{1}{2}\varepsilon = \mu$, $\frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha} = p$ und $\frac{a \sin\beta'}{b \sin\alpha'} = q$, so ergiebt sich $\sin(\lambda + \frac{1}{2}\delta) = p \sin(\mu - \frac{1}{2}\varepsilon)$ und $\sin(\lambda - \frac{1}{2}\delta) = q \sin(\mu + \frac{1}{2}\varepsilon)$. Die Summe und Differenz dieser Gleichungen giebt: $2 \sin\lambda \cos\frac{1}{2}\delta = p \sin(\mu - \frac{1}{2}\varepsilon) + q \sin(\mu + \frac{1}{2}\varepsilon)$ und $2 \cos\lambda \sin\frac{1}{2}\delta = p \sin(\mu - \frac{1}{2}\varepsilon) - q \sin(\mu + \frac{1}{2}\varepsilon)$. Multiplicirt man ferner beide Gleichungen durch resp. $\sin\frac{1}{2}\delta$ und $\cos\frac{1}{2}\delta$, quadrirt und addirt sie, so erhält man: $\sin\delta^2 = p^2 \sin(\mu - \frac{1}{2}\varepsilon)^2 + q^2 \sin(\mu + \frac{1}{2}\varepsilon)^2 - 2pq \sin(\mu - \frac{1}{2}\varepsilon) \sin(\mu + \frac{1}{2}\varepsilon) \cos\delta$, also $2 \sin\delta^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos\delta \cos\varepsilon + 2pq \cos\delta \cos 2\mu - p^2 \cos(2\mu - \varepsilon) - q^2 \cos(2\mu + \varepsilon)$, und hieraus $\frac{(p^2 + q^2)\cos\varepsilon - 2pq\cos\delta}{(p^2 - q^2)\sin\varepsilon} \cos 2\mu + \sin 2\mu = \frac{p^2 + q^2 - 2pq \cos\delta \cos\varepsilon - 2\sin\delta^2}{(p^2 - q^2)\sin\varepsilon}$, woraus 2μ nach §. 3, 1 zu berechnen, dann φ, ψ u. s. w.

14. Die vier Punkte C, A, B, D liegen in dieser Reihenfolge auf einer geraden Linie, und zwar soll AC = BD sein. Von irgend einem Punkte E aus hat man die Winkel CEA $= \alpha$, AEB $= \beta$ und BED $= \gamma$ gemessen; außerdem kennt man AB = a. Wie groß ist alsdann AC = BD = x? Aufl. Bezeichnen wir $\angle$ ACE $= \varphi$ und $\angle$ BDE $= \psi$, so erhalten wir $\frac{x}{AE} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$, $\frac{x}{BE} = \frac{\sin\gamma}{\sin\psi}$, $\frac{BE}{a + x} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha + \beta)}$, $\frac{AE}{a + x} = \frac{\sin\psi}{\sin(\beta + \gamma)}$; diese 4 Gleichungen mit einander multiplicirt, giebt $\frac{x^2}{(a + x)^2} = \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma)}$ oder $x\left(\sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma)}{\sin\alpha \sin\gamma}} - 1\right) = a$.

15. Dieselbe Aufgabe wie 14, nur soll CA = BD = a bekannt sein und AB = x gesucht werden. Aufl. Aehnlich wie in 14 findet man $x = a\left(\sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma)}{\sin\alpha \sin\gamma}} - 1\right)$.

16. Die vier Punkte C, A, B, D liegen in dieser Reihenfolge auf einer geraden Linie; man kennt CA = a und BD = b und kann von irgend einem Punkte E aus die Winkel CEA $= \alpha$, AEB $= \beta$ und BED $= \gamma$ messen. Wie groß ist AB = x? Aufl. Aehnlich

wie in 14 kann man vier Gleichungen aufstellen und erhält durch Multiplication derselben: $\frac{ab}{(a+x)(b+x)} = \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}$ oder $x^2 + (a+b)x + ab\left(1 - \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha \sin\gamma}\right) = 0$; da nun $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ ist, so nimmt obige Gleichung die Form an: $x^2 + (a+b)x - \frac{ab \sin\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \sin\gamma} = 0$.

17. **Fig. 26.** A, B, C seien drei Orte, welche sämmtlich in verschiedenen Horizontalebenen liegen, von B sei in der Richtung BA eine Standlinie $BD = a$ abgemessen; außerdem seien gemessen die Winkel $BDC = \alpha$, $CBD = \beta$, $ACB = \gamma$; ferner in C die Depression von A, nämlich $FCA = \delta$, und die Elevation von B, nämlich $BCF = \varepsilon$. Zu ermitteln sind die Entfernungen der drei Orte und die Höhen von B und C über dem Horizont von A, also CE und BG. Aufl. Es ist $BC = \frac{a \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $AC = \frac{BC \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}$; $AB = \frac{BC \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{a \sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}$; $CE = AC \sin\delta = \frac{a \sin\alpha \sin\beta \sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}$; $BF = BC \sin\varepsilon = \frac{a \sin\alpha \sin\varepsilon}{\sin(\alpha+\beta)}$; $BG = CE + BF$.

18. **Fig. 27.** Auf der geraden Linie AD bewegt sich mit der constanten Geschwindigkeit g ein Körper nach D, und ein zweiter auf der Geraden A′D mit der constanten Geschwindigkeit g′ nach demselben Punkt D hin. Als sich die Körper in A und A′ befanden, wurde $\angle AA'D = \alpha$ gemessen; nach t Secunden, als sie sich in B und B′ befanden, $\angle DB'B = \beta$; und bei einer dritten Beobachtung nach t′ Secunden, als sie sich in C und C′ befanden, $\angle CC'D = \gamma$. Wie groß ist die Entfernung der Punkte C und C′ vom Punkt D, und wie groß $\angle ADA'$? Aufl. Es sei $CD = x$, $C'D = y$, $\angle ADA' = \varphi$. Dann ist $BB' = EB' - EB = FB' - FB$; da nun $EB' = \frac{g' t \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$; $EB = \frac{g t \sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta-\alpha)}$; $FB' = \frac{g' t' \sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}$; $FB = \frac{g t' \sin(\gamma+\varphi)}{\sin(\gamma-\beta)}$, so erhält man die Gleichung:

$$\left(\frac{t \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} - \frac{t' \sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}\right)\cos\varphi + \left(\frac{t \cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} - \frac{t' \cos\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}\right)\sin\varphi$$

$= \frac{g' t \sin\alpha}{g \sin(\beta - \alpha)} - \frac{g' t' \sin\gamma}{g \sin(\gamma - \beta)}$. Setzt man nun die bekannten Ausdrücke $\frac{t \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} - \frac{t' \sin\gamma}{\sin(\gamma - \beta)} = r \cos\psi$ und $\frac{t \cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} - \frac{t' \cos\gamma}{\sin(\gamma - \beta)} = r \sin\psi$, so erhält man durch Division $\operatorname{tg}\psi$, und dann aus der obigen Gleichung $\cos(\psi - \varphi) = \frac{g'}{g} \cos\psi$, woraus φ zu berechnen. Ferner $CC' = FC' - FC = \frac{g't' \sin\beta - gt' \sin(\beta + \varphi)}{\sin(\gamma - \beta)}$, und folglich $x = \frac{t' \sin\gamma (g' \sin\beta - g \sin(\beta + \varphi))}{\sin\varphi \sin(\gamma - \beta)}$ und $y = \frac{x \sin(\gamma + \varphi)}{\sin\gamma} = \frac{t' \sin(\gamma + \varphi)(g' \sin\beta - g \sin(\beta + \varphi))}{\sin\varphi \sin(\gamma - \beta)}$.

Besonderer Fall. Bewegt sich nur Punkt A, während der Beobachtungspunkt A' in Ruhe bleibt, so kann man ebenfalls die drei Winkel α, β, γ messen; setzt man daher in den obigen Formeln $g' = 0$, so erhält man $\varphi = \psi - \frac{1}{2}\pi$; $x = \frac{t' g \sin\gamma \cos(\beta + \psi)}{\cos\psi \sin(\beta - \gamma)}$; und $y = \frac{t' g \cos(\psi + \gamma) \cos(\beta + \psi)}{\cos\psi \sin(\gamma - \beta)}$.

§. 43.

Parallaxen-Aufgaben.

Die Gesichtslinien, welche von zwei verschiedenen Oertern des Auges oder auch von zwei gleichzeitigen Beobachtern nach ein und demselben Gegenstand gezogen werden, bilden an diesem einen Winkel, welcher die Parallaxe des Objects genannt wird. Höhenparallaxe eines Sterns heißt der Winkel, welchen die von einem Ort und dem Mittelpunkt der Erde nach dem Stern gezogenen Linien bilden; dieser Winkel wird seinen größten Werth erreichen, wenn der Stern im Horizont des Beobachtungsortes steht, dann nennt man ihn die Horizontalparallaxe des Sterns; sie ist dann der Winkel, unter welchem der Erdradius von dem Stern aus erscheint.

1. Die Entfernung eines Himmelskörpers von der Erde zu berechnen, wenn die Zenithdistanzen desselben im Augenblick der Culmination an zwei unter demselben Meridian liegenden Orten von bekanntem Breitenunterschied beobachtet sind. Aufl. **Fig. 28.** A und B seien die beiden unter demselben Meridian liegenden Beobachtungsorte, deren Breitenunterschied $ACB = \gamma$ ist. In A sei die Zenithdistanz des

Sternes S zur Zeit der Culmination gemessen, nämlich $ZAS = z$, und zu derselben Zeit in B die Culmination desselben Sterns $Z'BS = z'$; mithin kennen wir auch $\angle CAS = \pi - z = \alpha$ und $\angle CBS = \pi - z' = \beta$; ferner $AC = BC = r$. Daher ist die Auflösung dieser Aufgabe ganz dieselbe, wie die von §. 42, 12. Es ist nämlich $\varphi + \psi = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ und $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (§. 7, 1); wodurch die Höhenparallaxen des Sternes S in Bezug auf die Orte A und B gefunden sind. Ferner ist $AS = \frac{r\sin(\alpha + \varphi)}{\sin\varphi}$; $BS = \frac{r\sin(\beta + \psi)}{\sin\psi}$; $CS = \frac{r\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{r\sin\beta}{\sin\psi}$. Beisp. Der Breitenunterschied vom Cap und Stockholm beträgt $93^0\ 15'\ 27''$; die Zenithdistanz des im Meridian stehenden Mondes beträgt am Cap $33^0\ 20'\ 24''$ nördlich, und in demselben Augenblick in Stockholm $61^0\ 13'\ 33''$ südlich. Die Entfernung des Mondes vom Mittelpunkt der Erde in Erdhalbmessern zu berechnen. $\varphi = 0^0\ 48'\ 14'',9$; $\psi = 0^0\ 30'\ 15'',1$; $CS = 62{,}456$ Erdhalbmesser.

2. Am Cap und in Stockholm, deren Breitenunterschied $= 93^0\ 15'\ 26'',7$, wurden die Zenithdistanzen des Mars im Augenblick seiner Culmination gemessen, nämlich in Stockholm $z = 68^0\ 14'$ südlich, und am Cap $z' = 25^0\ 2'$. $CS = 8373{,}53$ Erdradien.

Besonderer Fall. **Fig. 29.** Liegen A und B auf derselben Seite von CS, so ist $\varphi - \psi = \beta - \alpha - \gamma$ und $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$(§. 7, 2); $CS = \frac{r\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{r\sin\beta}{\sin\psi}$. Beisp. In Göttingen ist die Zenithdistanz des culminirenden Mondes $z = 43^0\ 20'\ 25''$ und in Altona zu derselben Zeit $z' = 41^0\ 17'\ 58''$, während der Breitenunterschied von Göttingen und Altona, welche auf demselben Meridian liegen, $2^0\ 0'\ 57'',4$ beträgt. Wie groß ist die Entfernung des Mondes von der Erde? $60{,}629$ Erdradien.

3. Berechnung der Horizontalparallaxe aus der Höhenparallaxe eines Sterns. Aufl. **Fig. 30.** $\varphi = ASC$ sei die in A gemessene Höhenparallaxe des Sterns, während die Zenithdistanz desselben $SAZ = z$ ist. Legt man in der Ebene desselben Meridians in A eine Tangente AS′ an die Erde, so daß $CS' = CS$, dann ist $AS'C = \lambda$ die Horizontalparallaxe. Nun ist $\frac{AC}{CS} = \frac{\sin\varphi}{\sin z}$, und $\frac{AC}{CS'} = \sin\lambda$, mithin $\sin\lambda = \frac{\sin\varphi}{\sin z}$.

1. Tabelle pythagoräischer Dreiecke.

№	a	b	c	α	β	№	a	b	c	α	β
1.	4	3	5	53° 7′ 48″,36	36° 52′ 11″,64	26.	176	57	185	72° 3′ 17″,09	17° 56′ 42″,91
2.	12	5	13	67° 22′ 48″,48	22° 37′ 11″,52	27.	220	21	221	84° 32′ 50″,56	5° 27′ 9″,44
3.	15	8	17	61° 55′ 39″,05	28° 4′ 20″,95	28.	143	24	145	80° 28′ 21″,78	9° 31′ 38″,22
4.	24	7	25	73° 44′ 23″,27	16° 15′ 36″,73	29.	120	119	169	45° 14′ 23″,02	44° 45′ 36″,98
5.	21	20	29	46° 23′ 49″,86	43° 36′ 10″,14	30.	168	95	193	60° 30′ 46″,35	29° 29′ 13″,65
6.	40	9	41	77° 19′ 10″,62	12° 40′ 49″,38	31.	264	23	265	85° 1′ 15″,22	4° 58′ 44″,78
7.	35	12	37	71° 4′ 31″,28	18° 55′ 28″,72	32.	165	52	173	72° 30′ 27″,63	17° 29′ 32″,37
8.	60	11	61	79° 36′ 40″,12	10° 23′ 19″,88	33.	153	104	185	55° 47′ 40″,35	34° 12′ 19″,65
9.	45	28	53	58° 6′ 33″,16	31° 53′ 26″,84	34.	156	133	205	49° 33′ 1″,03	40° 26′ 58″,97
10.	56	33	65	59° 29′ 23″,15	30° 30′ 36″,85	35.	208	105	233	63° 12′ 54″,01	26° 47′ 5″,99
11.	84	13	85	81° 12′ 9″,32	8° 47′ 50″,68	36.	260	69	269	75° 8′ 13″,85	14° 51′ 46″,15
12.	63	16	65	75° 44′ 59″,87	14° 15′ 0″,13	37.	312	25	313	85° 25′ 7″,61	4° 34′ 52″,39
13.	55	48	73	48° 53′ 16″,49	41° 6′ 43″,51	38.	195	28	197	81° 49′ 43″,56	8° 10′ 16″,44
14.	80	39	89	64° 0′ 38″,76	25° 59′ 21″,24	39.	187	84	205	65° 48′ 37″,74	24° 11′ 22″,26
15.	112	15	113	82° 22′ 18″,66	7° 37′ 41″,34	40.	171	140	221	50° 41′ 32″,47	39° 18′ 27″,53
16.	77	36	85	64° 56′ 32″,59	25° 3′ 27″,41	41.	252	115	277	65° 28′ 13″,63	24° 31′ 46″,37
17.	72	65	97	47° 55′ 29″,91	42° 4′ 30″,09	42.	308	75	317	76° 18′ 52″,03	13° 41′ 7″,97
18.	144	17	145	83° 16′ 1″,49	6° 43′ 58″,51	43.	364	27	365	85° 45′ 28″,10	4° 14′ 31″,90
19.	99	20	101	78° 34′ 43″,73	11° 25′ 16″,27	44.	221	60	229	74° 48′ 38″,57	15° 11′ 21″,43
20.	91	60	109	56° 36′ 5″,44	33° 23′ 54″,56	45.	209	120	241	60° 8′ 13″,81	29° 51′ 46″,19
21.	140	51	149	69° 59′ 2″,53	20° 0′ 57″,47	46.	240	161	289	56° 8′ 41″,89	33° 51′ 19″,11
22.	180	19	181	83° 58′ 27″,93	6° 1′ 32″,07	47.	420	29	421	86° 3′ 0″,48	3° 56′ 59″,52
23.	117	44	125	69° 23′ 25″,10	20° 36′ 34″,90	48.	255	32	257	82° 50′ 50″,39	7° 9′ 9″,61
24.	105	88	137	50° 2′ 1″,64	39° 57′ 58″,36	49.	247	96	265	68° 45′ 38″,49	21° 14′ 21″,51
25.	132	85	157	57° 13′ 15″,31	32° 16′ 44″,69	50.	231	160	281	55° 17′ 31″,02	34° 42′ 28″,98

№	a	b	c	α	β	№	a	b	c	α	β
51.	224	207	305	47° 15′ 31″,52	42° 44′ 28″,48	78.	684	37	685	86° 54′ 13″,26	3° 5′ 46″,74
52.	288	175	337	58° 42′ 55″,84	31° 17′ 4″,16	79.	399	40	401	84° 16′ 30″,68	5° 43′ 29″,32
53.	352	135	377	69° 1′ 1″,37	20° 58′ 58″,63	80.	391	120	409	72° 56′ 18″,49	17° 3′ 41″,51
54.	416	87	425	78° 11′ 15″,78	11° 48′ 44″,22	81.	351	280	449	51° 25′ 11″,67	38° 34′ 48″,33
55.	480	31	481	86° 18′ 17″,20	3° 41′ 42″,80	82.	360	319	481	48° 27′ 19″,76	41° 32′ 40″,24
56.	285	68	293	76° 34′ 49″,19	13° 25′ 10″,81	83.	440	279	521	57° 37′ 17″,72	32° 22′ 42″,28
57.	273	136	305	63° 31′ 8″,25	26° 28′ 51″,75	84.	520	231	569	66° 2′ 51″,83	23° 57′ 8″,17
58.	253	204	325	51° 7′ 11″,74	38° 52′ 48″,26	85.	680	111	689	80° 43′ 44″,66	9° 16′ 15″,34
59.	272	225	353	50° 24′ 8″,09	39° 35′ 51″,91	86.	760	39	761	87° 3′ 44″,63	2° 56′ 15″,37
60.	340	189	389	60° 55′ 51″,92	29° 4′ 8″,08	87.	437	84	445	79° 7′ 9″,60	10° 52′ 50″,40
61.	408	145	433	70° 26′ 6″,67	19° 33′ 53″,33	88.	425	168	457	68° 25′ 53″,05	21° 34′ 6″,95
62.	476	93	485	78° 56′ 41″,72	11° 3′ 18″,28	89.	377	336	505	48° 17′ 27″,90	41° 42′ 32″,10
63.	544	33	545	86° 31′ 42″,93	3° 28′ 17″,07	90.	420	341	541	50° 55′ 36″,08	39° 4′ 23″,92
64.	323	36	325	83° 38′ 25″,23	6° 21′ 34″,77	91.	672	185	697	74° 36′ 28″,43	15° 23′ 31″,57
65.	299	180	349	58° 57′ 6″,41	31° 2′ 53″,59	92.	840	41	841	87° 12′ 20″,30	2° 47′ 39″,70
66.	275	252	373	47° 29′ 56″,37	42° 30′ 3″,63	93.	483	44	485	84° 47′ 41″,55	5° 12′ 18″,45
67.	396	203	445	62° 51′ 32″,89	27° 8′ 27″,11	94.	475	132	493	74° 28′ 10″,81	15° 31′ 49″,19
68.	468	155	493	71° 40′ 31″,11	18° 19′ 28″,89	95.	459	220	509	64° 23′ 29″,28	25° 36′ 30″,72
69.	612	35	613	86° 43′ 36″,64	3° 16′ 23″,36	96.	435	308	533	54° 41′ 59″,13	35° 18′ 0″,87
70.	357	76	365	77° 58′ 55″,15	12° 1′ 4″,85	97.	403	396	565	45° 30′ 7″,01	44° 29′ 52″,99
71.	345	152	377	66° 13′ 21″,66	23° 46′ 38″,34	98.	572	315	653	61° 9′ 30″,42	28° 50′ 29″,58
72.	325	228	397	54° 56′ 55″,93	35° 3′ 4″,07	99.	660	259	709	68° 34′ 25″,51	21° 25′ 34″,49
73.	304	297	425	45° 40′ 2″,33	44° 19′ 57″,67	100.	748	195	773	75° 23′ 18″,53	14° 36′ 41″,47
74.	380	261	461	55° 31′ 1″,48	34° 28′ 58″,52	101.	836	123	845	81° 37′ 48″,60	8° 22′ 11″,40
75.	456	217	505	64° 33′ 4″,64	25° 26′ 55″,36	102.	924	43	925	87° 20′ 8″,02	2° 39′ 51″,98
76.	532	165	557	72° 46′ 7″,34	17° 13′ 52″,66	103.	525	92	533	80° 3′ 37″,87	9° 56′ 22″,13
77.	608	105	617	80° 12′ 6″,54	9° 47′ 53″,46	104.	513	184	545	70° 16′ 6″,20	19° 43′ 53″,80

№	a	b	c	α	β	№	a	b	c	α	β
105.	493	276	565	60° 45′ 29″,70	29° 14′ 30″,30	119.	816	287	865	70° 37′ 20″,74	19° 22′ 39″,26
106.	465	368	593	51° 38′ 31″,15	38° 21′ 28″,85	120.	912	215	937	76° 44′ 5″,89	13° 15′ 54″,11
107.	460	429	629	46° 59′ 49″,67	43° 0′ 10″,33	121.	1104	47	1105	87° 33′ 44″,10	2° 26′ 15″,90
108.	552	385	673	55° 6′ 20″,25	34° 53′ 39″,75	122.	621	100	629	80° 51′ 7″,77	9° 8′ 52″,23
109.	644	333	725	62° 39′ 26″,61	27° 20′ 33″,39	123.	609	200	641	71° 49′ 10″,00	18° 10′ 50″,00
110.	736	273	785	69° 38′ 56″,33	20° 21′ 3″,67	124.	589	300	661	63° 0′ 30″,71	26° 59′ 29″,29
111.	828	205	853	76° 5′ 38″,69	13° 54′ 21″,31	125.	561	400	689	54° 30′ 38″,36	35° 29′ 21″,64
112.	920	129	929	82° 1′ 5″,42	7° 58′ 54″,58	126.	600	481	769	51° 16′ 55″,24	38° 43′ 4″,76
113.	1012	45	1013	87° 27′ 14″,18	2° 32′ 45″,82	127.	700	429	821	58° 29′ 51″,54	31° 30′ 8″,46
114.	575	48	577	85° 13′ 41″,20	4° 46′ 18″,80	128.	800	369	881	65° 14′ 18″,55	24° 45′ 41″,45
115.	551	240	601	66° 27′ 48″,33	23° 32′ 11″,67	129.	900	301	949	71° 30′ 27″,99	18° 29′ 32″,01
116.	527	336	625	57° 28′ 46″,52	32° 31′ 13″,48	130.	1100	141	1109	82° 41′ 44″,00	7° 18′ 16″,00
117.	528	455	697	49° 14′ 49″,67	40° 45′ 10″,33	131.	1200	49	1201	87° 39′ 42″,19	2° 20′ 17″,81
118.	624	407	745	56° 53′ 9″,09	33° 6′ 50″,91						

2. Tabelle vollständig berechneter schiefwinkliger Dreiecke zu Zahlenbeispielen für die Dreiecksaufgaben.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
a	195	195	841	841	4107	4107
b	169	169	725	725	1665	1665
c	182	52	1044	174	4884	2886
h_a	145,6	41,6	720	120	1584	936
h_b	168	48	835,2	139,2	3907,2	2308,8
h_c	156	156	580	580	1332	1332
t_a	146,06933	78,270375	794,33	318,0098	3015,955	1154,88
t_b	168,6246	114,9968	875,9008	487,2087	4434,794	3450,387
t_c	158,1518	180,6018	586,48865	780,31	1963,79	2781,652
w_c	157,21402	179,6732	582,0104	776,0139	1393,628	2264,645
p	117	117	609	609	3885	3885
q	65	— 65	435	— 435	999	— 999
u	97,5	27,85714	560,6667	93,44444	3475,154	2053,5
v	84,5	24,14286	483,3333	80,55555	1408,846	832,5
r	105,625	105,625	525,625	525,625	2566,875	2566,875
ϱ	52	19,5	232	58	610,5	444
ϱ_a	182	312	652,5	1740	2664	8658
ϱ_b	136,5	104	522	348	888	721,5
ϱ_c	156	26	1160	72,5	7326	1332
$\triangle$	14196	4056	302760	50460	3252744	1922076
α	67° 22′ 48″,48	112° 37′ 11″,52	53° 7′ 48″,36	126° 52′ 11″,64	53° 7′ 48″,36	126° 52′ 11″64
β	53° 7′ 48″,36	53° 7′ 48″,36	43° 36′ 10″,14	43° 36′ 10″,14	18° 55′ 28″,72	18° 55′ 28″,72
γ	59° 29′ 23″,16	14° 15′ 0″,12	83° 16′ 1″,50	9° 31′ 38″,22	107° 56′ 42″,92	34° 12′ 19″,64
α_1	32° 16′ 32″,32	94° 45′ 49″,13	21° 24′ 46″,68	114° 13′ 39″,89	12° 45′ 27″,11	35° 13′ 3″,34
α_2	35° 6′ 16″,16	17° 51′ 22″,39	31° 43′ 1″,68	12° 38′ 31″,75	40° 22′ 21″,25	91° 39′ 8″,30
β_1	25° 34′ 38″,24	10° 25′ 14″,56	24° 16′ 4″,83	7° 4′ 26″,26	10° 17′ 15″,05	7° 47′ 43″,64
β_2	27° 33′ 10″,12	42° 42′ 33″,80	19° 20′ 5″,31	36° 31′ 43″,88	8° 38′ 13″,67	11° 7′ 45″,08
γ_1	32° 4′ 55″,88	7° 38′ 11″,66	45° 24′ 2″,40	5° 7′ 2″,33	84° 9′ 37″,84	24° 31′ 10″,71
γ_2	27° 24′ 27″,28	6° 36′ 48″,46	37° 51′ 59″,10	4° 24′ 35″,89	23° 47′ 5″,08	9° 41′ 8″,93

	7.	8.	9.	10.	11.	12.
a	429777	429777	1369	1369	260	260
b	229755	229755	740	740	169	169
c	400044	329766	1887	703	273	143
h_a	211344	174216	612	228	163,8	85,8
h_b	395337,6	325886,4	1132,2	421,8	252	132
h_c	227052	227052	444	444	156	156
t_a	245426,6	185982,3	1259,224	228,8323	186,1317	87,20665
t_b	398967,3	365417,7	1606,414	1023,3696	252,8324	192,0527
t_c	280604,7	302590,4	566,2935	1042,75	171,6049	207,2879
w_c	249829	272135,2	449,5006	948,9457	161,6976	197,6304
p	364905	364905	1295	1295	208	208
q	35139	— 35139	592	— 592	65	— 65
u	260684,4	214888,5	1224,895	456,333 . . .	165,4545 . . .	86,66 . . .
v	139359,6	114877,5	662,105	246,666	107,5454 . . .	56,33 . . .
r	217446,7	217446,7	1140,833 . . .	1140,833 . . .	140,833 . . .	140,833 . .
ϱ	85723,7	75684	209,666 . . .	111	60,66	39
ϱ_a	454104	577090,5	666	4218	234	429
ϱ_b	151368	141328,3	333	234,33 . . .	117	95,33 . . .
ϱ_c	350038,5	227052	3774	222	273	78
$\triangle$	45415395144	37437014916	418914	156066	21294	11154
α	81° 12′ 9″,32	98° 47′ 50″,68	36° 52′ 11″,64	143° 7′ 48″,36	67° 22′ 48″,48	112° 37′ 11″,52
β	31° 53′ 26″,84	31° 53′ 26″,84	18° 55′ 28″,72	18° 55′ 28″,72	36° 52′ 11″,64	36° 52′ 11″,64
γ	66° 54′ 23″,84	49° 18′ 42″,48	124° 12′ 19″,64	17° 56′ 42″,92	75° 44′ 59″,88	30° 30′ 36″,84
α_1	27° 33′ 10″,11	37° 37′ 9″,70	10° 9′ 15″,36	75° 57′ 49″,52	24° 46′ 30″,50	63° 26′ 5″,82
α_2	53° 38′ 59″,21	61° 10′ 40″,98	26° 42′ 56″,28	67° 9′ 58″,84	42° 36′ 17″,98	49° 11′ 5″,70
β_1	15° 21′ 31″,89	13° 47′ 27″,24	10° 58′ 52″,22	6° 23′ 45″,01	18° 54′ 2″,73	12° 54′ 26″,67
β_2	16° 31′ 54″,95	18° 5′ 59″,60	7° 56′ 36″,50	12° 31′ 43″,71	17° 58′ 8″,91	23° 57′ 44″,97
γ_1	44° 47′ 3″,15	32° 34′ 51″,98	91° 29′ 51″,30	11° 40′ 7″,59	47° 14′ 36″,35	18° 33′ 57″,80
γ_2	22° 7′ 20″,69	16° 43′ 50″,50	32° 42′ 28″,34	6° 16′ 35″,33	28° 30′ 23″,53	11° 56′ 39″,04

	13.	14.	15.	16.	17.	18.
a	19604	19604	37485	37485	5840	5840
b	10933	10933	30345	30345	5329	5329
c	26013	10179	27132	17850	8687	657
h_a	10005	3915	21705,6	14280	5212,2	394,2
h_b	17940	7020	26812,8	17640	5712	432
h_c	7540	7540	29988	29988	3504	3504
t_a	17378,844	3935,996	21844,93	16384,12	6588,224	2426,632
t_b	22374,40	14631,53	28990,18	25133,03	6905,45	3188,896
t_c	9096,956	15033,986	31287,95	32913,77	3519,365	5580,687
w_c	7668,195	13802,75	30910,92	32537,81	3506,402	5568,992
p	18096	18096	22491	22491	4672	4672
q	7917	— 7917	4641	— 4641	4015	— 4015
u	16699,704	6534,66 . . .	14994	9864,474	4542,22 . . .	343,5294
v	9313,296	3644,33	12138	7985,526	4144,77	313,4706
r	14212,9	14212,9	18965,625	18965,625	4440,833 . . .	4440,833 . .
ϱ	3468,4	1885	8568	6247,5	1533	194,666 . . .
ϱ_a	11310	50895	40698	49980	3723	15768
ϱ_b	5655	4071,6	23740,5	21420	3309,33 . . .	1971
ϱ_c	43355	3770	19992	10710	12264	219
$\triangle$	98069010	3837483	406817208	267642900	15219624	1151064
α	43° 36′ 10″,14	136° 23′ 49″,86	81° 12′ 9″,32	98° 47′ 50″,68	41° 6′ 43″,51	138° 53′ 16″,49
β	22° 37′ 11″,52	22° 37′ 11″,52	53° 7′ 48″,36	53° 7′ 48″,36	36° 52′ 11″,64	36° 52′ 11″,64
γ	113° 46′ 38″,34	20° 58′ 58″,62	45° 40′ 2″,32	28° 4′ 20″,96	102° 1′ 4″,85	4° 14′ 31″,87
α_1	12° 31′ 43″,70	73° 18′ 2″,73	43° 20′ 40″,25	66° 13′ 39″,52	15° 25′ 19″,78	133° 46′ 52″,07
α_2	31° 4′ 26″,44	63° 5′ 47″,13	37° 51′ 29″,07	32° 34′ 11″,16	25° 41′ 23″,74	5° 6′ 24″,43
β_1	12° 55′ 10″,11	7° 41′ 18″,42	21° 59′ 5″,42	16° 30′ 15″,70	22° 10′ 21″,29	3° 32′ 36″,99
β_2	9° 42′ 1″,41	14° 55′ 53″,10	31° 8′ 42″,94	36° 37′ 32″,66	14° 41′ 50″,35	33° 19′ 34″,65
γ_1	80° 24′ 59″,52	13° 30′ 5″,44	25° 22′ 17″,11	15° 32′ 37″,25	54° 14′ 37″,45	2° 13′ 5″,46
γ_2	33° 21′ 38″,82	7° 28′ 53″,18	20° 17′ 45″,21	12° 31′ 43″,71	47° 46′ 27″,41	2° 1′ 26″,42

	19.	20.	21.	22.	23.	24.
a	34920	34920	11271	11271	170	170
b	28227	28227	5525	5525	153	153
c	46851	9021	11492	8398	289	19
h_a	28110,6	5412,6	5408	3952	122,4	8,0470588
h_b	34776	6696	11032,32	8062,08	136	8,9411765
h_c	20952	20952	5304	5304	72	72
t_a	34511,43	11585,31	7038,252	4332,111	215,0349	68,2642
t_b	38833,24	21241,505	11041,71	9547,228	224,4065	93,69233
t_c	21432,005	31428,35	6764,91	7752,81	72,62403	161,44427
w_c	21049,88	31073,64	5754,987	8412,72	72,02492	160,9979
p	27936	27936	9945	9945	154	154
q	18915	— 18915	1547	— 1547	135	— 135
u	25908,39	4988,571	7711,737	5635,5	152,105	10
v	20942,61	4032,429	3780,263	2762,5	136,895	9
r	23522,5	23522,5	5870,3125	5870,3125	180,625	180,625
ϱ	8924	2619	2154,75	1768	34	4
ϱ_a	24444	81189	10608	16796	76,5	684
ϱ_b	18333	12028	3536	3149,25	68	38
ϱ_c	60237	3492	11492	5304	612	4,5
$\triangle$	490811076	94503996	30476784	22271496	10404	684
α	47° 55′ 29″,91	132° 4′ 30″,09	73° 44′ 23″,27	106° 15′ 36″,73	28° 4′ 20″,95	151° 55′ 39″,04
β	36° 52′ 11″,64	36° 52′ 11″,64	28° 4′ 20″,95	28° 4′ 20″,95	25° 3′ 27″,41	25° 3′ 27″,41
γ	95° 12′ 18″,45	11° 3′ 18″,27	78° 11′ 15″,78	45° 40′ 2″,32	126° 52′ 11″,64	3° 0′ 53″,54
α_1	17° 40′ 15″,78	115° 16′ 39″,82	22° 8′ 7″,76	37° 44′ 48″,49	9° 38′ 15″,14	148° 10′ 21″,18
α_2	30° 15′ 14″,14	16° 47′ 50″,28	51° 36′ 15″,52	68° 30′ 48″,24	18° 26′ 5″,81	3° 45′ 17″,86
β_1	21° 13′ 9″,78	7° 19′ 11″,04	14° 10′ 31″,41	11° 56′ 41″,68	15° 49′ 34″,15	2° 27′ 40″,57
β_2	15° 39′ 1″,86	29° 33′ 0″,60	13° 53′ 49″,83	16° 7′ 39″,27	9° 13′ 53″,26	22° 35′ 46″,84
γ_1	54° 13′ 26″,80	6° 6′ 54″,76	54° 37′ 39″,69	31° 1′ 49″,47	69° 26′ 38″,24	1° 35′ 12″,455
γ_2	40° 58′ 51″,64	4° 56′ 23″,52	23° 33′ 36″,09	14° 38′ 12″,85	57° 25′ 33″,40	1° 25′ 41″,085

	25.	26.	27.	28.	29.	30.
a	1880125	1880125	68450	68450	25230	25230
b	514865	514865	23125	23125	4205	4205
c	2047890	1596660	71225	58275	25375	24389
h_a	504096	393024	23100	18900	4200	4036,8
h_b	1840800	1435200	68376	55944	25200	24220,8
h_c	462800	462800	22200	22200	4176	4176
t_a	1160065,6	723524	40404,61	28178,36	13101,45	12129,08
t_b	1948868,6	1725058	68887,65	62505,99	25215,1	24723,83
t_c	922775,5	112367,6	36631,05	41965,35	12889,68	13357,083
w_c	510147,7	733337,5	25006,97	30690,31	5220	5766,859
p	1822275	1822275	64750	64750	24882	24882
q	225615	— 225615	6475	— 6475	493	— 493
u	1607643	1253416,7	53238,89	43559,09	21750	20904,857
v	440247	343243,3	17986,11	14715,91	3625	3484,143
r	1045819,53125	1045819,53125	35651,042	35651,042	12702,604	12702,604
ϱ	213321,875	185120	9712,5	8633,333	1933,33	1892,25
ϱ_a	1388400	3193320	61050	99900	24360	30276
ϱ_b	277680	249478,125	13566,667	12487,5	2283,75	2242,667
ϱ_c	2730520	925600	77700	38850	26100	20184
$\triangle$	473881746000	369467124000	790597500	646852500	52983000	50924232
α	64° 0′ 38″,76	115° 59′ 21″,24	73° 44′ 23″,26	106° 15′ 36″,74	83° 16′ 1″,49	96° 43′ 58″,51
β	14° 15′ 0″,12	14° 15′ 0″,12	18° 55′ 28″,72	18° 55′ 28″,72	9° 31′ 38″,21	9° 31′ 38″,21
γ	101° 44′ 21″,12	49° 45′ 38″,64	87° 20′ 8″,02	54° 48′ 54″,54	87° 12′ 20″,3	73° 44′ 23″,28
α_1	11° 30′ 21″,81	18° 31′ 8″,11	15° 56′ 43″,44	23° 11′ 54″,92	9° 10′ 13″,52	9° 54′ 45″,89
α_2	52° 30′ 16″,95	97° 20′ 13″,13	57° 47′ 39″,82	83° 3′ 41″,82	74° 5′ 47″,97	86° 49′ 12″,62
β_1	7° 25′ 51″,24	6° 32′ 28″,02	9° 39′ 7″,35	8° 41′ 44″,29	4° 46′ 30″,36	4° 40′ 57″,77
β_2	6° 49′ 8″,88	7° 42′ 32″,1	9° 16′ 21″,37	10° 13′ 44″,43	4° 44′ 59″,86	4° 50′ 40″,44
γ_1	85° 53′ 16″,56	39° 41′ 19″,95	68° 57′ 22″,52	41° 48′ 4″,84	77° 49′ 45″,05	65° 2′ 54″,58
γ_2	15° 51′ 4″,56	10° 4′ 18″,69	18° 22′ 45″,5	13° 0′ 49″,7	9° 22′ 35″,25	8° 41′ 28″,7

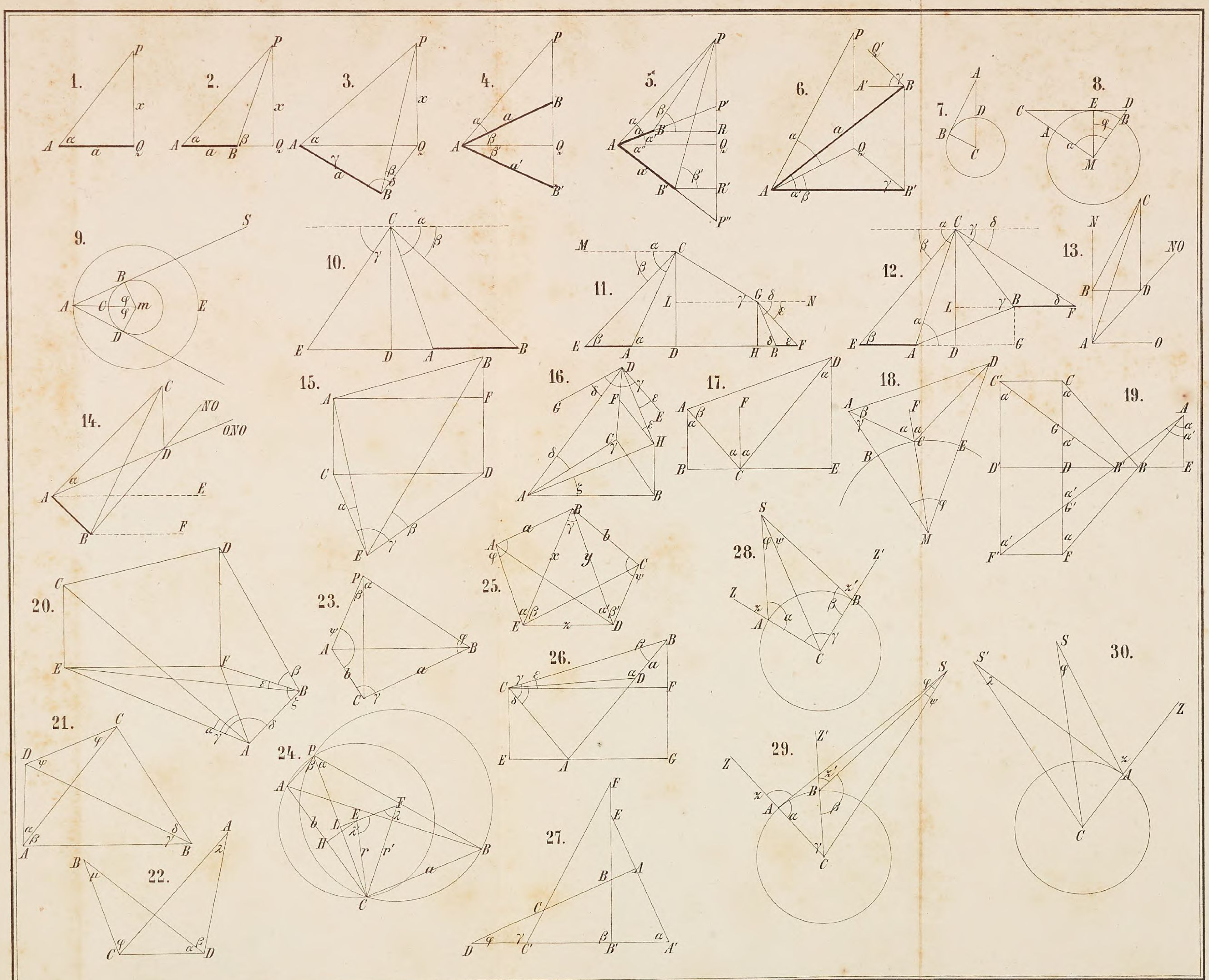
	31.	32.	33.	34.	35.	36.
a	98397	98397	4675	4675	2890	2890
b	73715	73715	1445	1445	1275	1275
c	85956	49764	5100	3876	2975	2261
h_a	62244	36036	1428	1085,28	1260	957,6
h_b	83311,2	48232,8	4620	3511,2	2856	2170,56
h_c	71253	71253	1309	1309	1224	1224
t_a	63055,16	38986,71	2930,036	1758,35	1774,852	1131,7454
t_b	84759	68761,18	4838,472	4232,907	2862,683	2515,095
t_c	75472,53	83221,17	2338,659	2866,353	1673,886	1926,352
w_c	73646,25	81409,54	1436,662	2011,397	1343,419	1612,103
p	67860	67860	4488	4488	2618	2618
q	18096	— 18096	612	— 612	357	— 357
u	49198,5	28483,342	3895,8333	2960,8333	2064,2857	1568,8571
v	85956,5	21280,658	1204,1667	915,1667	910,7143	692,1429
r	50760,357	50760,357	2580,3571	2580,3571	1505,2083	1505,2083
ϱ	23751	15995,5714	595	507,5714	510	430,6667
ϱ_a	100282	142506	3570	7854	2677,5	4284
ϱ_b	55257,429	47502	801,4268	714	793,3333	714
ϱ_c	71253	29029	6545	2261	3060	1453,5
$\triangle$	3062311434	1772917146	3337950	2536842	1820700	1383732
α	75° 44′ 59″,87	104° 15′ 0″,13	64° 56′ 32″,59	115° 3′ 27″,41	73° 44′ 23″,27	106° 15′ 36″,37
β	46° 23′ 49″,85	46° 23′ 49″,85	16° 15′ 36″,73	16° 15′ 36″,73	25° 3′ 27″,41	25° 3′ 27″,41
γ	57° 51′ 10″,28	29° 21′ 10″,02	98° 47′ 50″,68	48° 40′ 55″,86	81° 12′ 9″,32	48° 40′ 55″,86
α_1	34° 24′ 9″,58	66° 2′ 15″,05	12° 54′ 26″,67	21° 51′ 10″,23	20° 10′ 14″,35	32° 44′ 6″,81
α_2	41° 20′ 50″,29	38° 12′ 45″,08	52° 2′ 5″,92	93° 12′ 17″,18	53° 34′ 8″,92	73° 31′ 29″,92
β_1	21° 32′ 31″	15° 11′ 27″,56	8° 29′ 9″,5	7° 21′ 55″,21	12° 42′ 48″	10° 58′ 27″,86
β_2	24° 51′ 18″,85	31° 12′ 22″,29	7° 46′ 27″,23	8° 53′ 41″,52	12° 20′ 39″,41	14° 4′ 59″,55
γ_1	33° 29′ 58″,42	16° 50′ 50″,2	81° 1′ 15″,59	37° 46′ 10″	58° 59′ 10″,03	34° 17′ 25″,07
γ_2	24° 21′ 11″,86	12° 30′ 19″,82	17° 46′ 35″,09	10° 54′ 45″,86	22° 12′ 59″,29	14° 23′ 30″,79

	37.	38.	39.	40.	41.	42.
a	59245	59245	68962	68962	39,39232	190,1315
b	28577	28577	48749	48749	25,71150	174,0111
c	58548	46002	60639	33237	34,64102	104,5707
h_a	27552	21648	41820	27060	22,26682	94,77324
h_b	57120	44880	59160	38280	34,11474	103,5530
h_c	27880	27880	47560	47560	25,32089	172,3176
t_a	35281,21	24267,72	42870,01	27732,01	23,29383	107,5637
t_b	57138,7	51077,55	60185,6	50532,51	34,79377	126,3825
t_c	36143,33	40426	51447,43	56402,35	28,39749	174,5885
w_c	30668,77	35050,15	49695,7	54665,25	26,94593	174,2312
p	52275	52275	49938	49938	30,17626	80,35302
q	6273	— 6273	10701	— 10701	4,46476	24,21766
u	39496,667	31033,095	35525,879	22987,333	20,96021	54,6
v	19051,333	14968,905	25113,121	16249,667	13,68081	49,9707
r	30363,0625	30363,0625	35343,025	35343,025	20	96
ϱ	11152	9583,75	16170,4	11890	8,793857	38,4443
ϱ_a	58548	83640	71340	98092,5	41,84795	203,7229
ϱ_b	18296,25	16728	35670	31389,6	18,15207	149,3015
ϱ_c	55760	30668	50532	23780	28,79385	69,4196
$\triangle$	816159120	641267880	2883990840	933055860	438,5707	9009,686
α	77° 19′ 10″,62	102° 40′ 49″,38	77° 19′ 10″,62	102° 40′ 49″,38	80°	82°
β	28° 4′ 20″,95	28° 4′ 20″,95	43° 36′ 10″,14	43° 36′ 10″,14	40°	65°
γ	74° 36′ 28″,43	49° 14′ 49″,67	59° 4′ 39″,24	33° 43′ 0″,48	60°	33°
α_1	23° 16′ 22″,45	35° 3′ 33″,95	33° 41′ 24″,24	59° 2′ 10″,48	32° 55′ 22″,62	53° 13′ 33″,44
α_2	54° 2′ 48″,17	67° 37′ 15″,43	43° 37′ 46″,38	43° 38′ 38″,9	47° 4′ 37″,38	28° 46′ 26″,56
β_1	13° 57′ 5″,35	12° 14′ 4″,15	20° 19′ 47″,69	15° 31′ 49″,19	18° 39′ 42″,77	22° 1′ 15″,51
β_2	14° 7′ 15″,60	15° 50′ 16″,8	23° 16′ 22″,45	28° 4′ 20″,95	21° 20′ 17″,23	42° 58′ 44″,49
γ_1	52° 12′ 10″,86	33° 43′ 0″,48	35° 5′ 47″,51	19° 50′ 13″,66	36° 55′ 3″,06	17° 15′ 4″,64
γ_2	22° 24′ 17″,57	15° 31′ 49″,19	23° 58′ 51″,73	13° 52′ 46″,82	23° 4′ 56″,94	15° 44′ 55″,36

	43.	44.	45.	46.	47.	48.
a	17,11902	207,6452	97,02957	80,81357	2,614672	43,99329
b	9,803502	88,92522	64,27876	65,87983	1,046985	22
c	11,32777	248,6392	89,87941	74,47819	1,570079	38,48327
h_a	6,169544	85,03962	57,77337	57,0536	0,05479497	19,241637
h_b	10,77334	198,5721	87,2096	69,9866	0,1368414	38,47741
h_c	9,323685	71,01884	62,3694	61,90679	0,09125077	21,996646
t_a	6,240857	155,1949	61,24825	57,54013	0,2674593	22,32999
t_b	13,66244	224,7044	87,827	70,3838	2,0920775	39,83951
t_c	12,74775	100,2834	68,94687	63,61973	1,830317	28,97352
w_c	11,75225	74,06902	65,57908	62,86179	1,4947247	25,27317
p	14,35722	195,1227	74,32897	51,94596	2,61308	38,09932
q	— 3,029449	53,51654	15,550044	22,53223	— 1,043001	0,38395
u	7,2029	174,0859	54,06391	41,03012	1,1211429	25,65421
v	4,12487	74,5533	35,81549	33,44806	0,4489358	12,82906
r	9	130	50	43	15	22
ϱ	2,761195	32,38767	22,31688	20,84673	0,02738496	8,10232
ϱ_a	26,32345	135,9158	98,12469	77,433	59,91322589	51,33441
ϱ_b	5,66512	48,06757	45,71244	51,56699	0,04566015	13,99721
ϱ_c	6,772566	368,4045	78,47975	63,84673	0,06849892	30,7707
$\triangle$	52,80827	8829,035	2802,863	2305,352	0,07163543	423,2515
α	108°	53°	76°	70°	175°	89°
β	33°	20°	40°	50°	2°	30°
γ	39°	107°	64°	60°	3°	61°
α_1	48° 19′ 48″,28	13° 13′ 36″,28	30° 36′ 26″,63	32° 32′ 37″,718	9° 49′ 19″,26	29° 30′ 26″,68
α_2	59° 40′ 11″,72	39° 46′ 23″,72	45° 23′ 33″,37	37° 27′ 22″,282	165° 10′ 40″,74	59° 29′ 33″,32
β_1	13° 2′ 56″,52	10° 54′ 27″,33	19° 12′ 8″,236	23° 54′ 36″,537	0° 45′ 1″,2856	13° 58′ 28″,058
β_2	19° 57′ 3″,48	9° 5′ 32″,67	20° 47′ 51″,766	26° 5′ 23″,463	1° 14′ 58″,7144	16° 1′ 31″,942
γ_1	24° 59′ 46″,47	81° 54′ 46″,20	39° 13′ 49″,48	33° 21′ 49″,42	2° 8′ 32″,366	41° 36′ 23″,09
γ_2	14° 0′ 13″,53	25° 5′ 13″,80	24° 46′ 10″,52	26° 38′ 10″,58	0° 51′ 27″,634	19° 23′ 36″,91

	49.	50.	51.	52.	53.	54.
a	43,87127	151,7603	403,2891	209,5589	134,0502	78,10269
b	38,0203	74,34833	321,7092	127,7251	50,60688	28,07354
c	46,73095	104,1996	537,8483	209,506	99,53919	98,169
h_a	35,53449	46,11347	320,4273	121,6326	31,48355	21,87263
h_b	41,00292	94,12715	401,6821	199,5629	83,39533	60,85131
h_c	33,35998	67,16147	240,2626	121,6634	42,39916	17,40174
t_a	36,51698	49,34382	394,624	138,2915	41,73951	60,72586
t_b	41,14425	124,7496	447,3111	199,5631	115,3191	87,58743
t_c	33,7516	107,5409	246,4738	138,3512	88,25104	32,16812
w_c	33,53864	94,2704	241,5312	128,2135	69,37329	17,83929
p	28,4921	136,0902	323,9074	170,6253	127,1683	76,13940
q	18,23884	— 31,89061	213,9408	38,88104	— 27,62911	22,02959
u	25,03489	69,93702	299,1846	130,1688	72,25964	72,21262
v	21,69606	34,26257	238,6631	79,33722	27,27959	25,95638
r	25	84	270	110	80	63
ϱ	12,1203	21,18686	102,3283	46,61608	14,85022	8,359927
ϱ_a	38,13463	261,2476	283,2211	199,6457	262,2027	35,48617
ϱ_b	29,6479	38,53386	208,6196	87,48961	23,06438	11,52721
ϱ_c	44,33776	57,40508	690,4881	199,4804	49,58274	213,3464
$\triangle$	779,4716	3499,098	64612,42	12744,6	2110,189	854,1557
α	61° 20′	115° 24′	48° 19′	72° 16′ 38″	123° 5′ 24″	38° 18′ 22″
β	49° 30′	26° 16′	36° 34′	35° 29′ 26″	18° 26′ 20″	12° 52′ 26″
γ	69° 10′	38° 20′	95° 7′	72° 13′ 56″	38° 28′ 16″	128° 49′ 12″
α_1	27° 10′ 44″,75	42° 53′ 10″,66	17° 43′ 23″,68	26° 5′ 46″,46	30° 31′ 27″,03	8° 14′ 15″,92
α_2	34° 9′ 15″,25	72° 30′ 49″,34	30° 35′ 36″,32	46° 10′ 51″,54	92° 33′ 56″,97	30° 4′ 6″,08
β_1	25° 35′ 1″,10	10° 39′ 3″,19	20° 59′ 16″,37	17° 44′ 34″,65	7° 50′ 41″,61	7° 10′ 21″,96
β_2	23° 54′ 58″,90	15° 36′ 56″,81	15° 34′ 43″,63	17° 44′ 51″,35	10° 35′ 35″,39	5° 42′ 4″,04
γ_1	37° 24′ 11″,95	25° 57′ 10″,88	54° 34′ 23″,93	46° 9′ 18″,68	28° 11′ 45″,57	108° 56′ 41″,02
γ_2	31° 45′ 48″,05	12° 22′ 49″,12	40° 32′ 36″,07	26° 4′ 37″,32	10° 16′ 30″,43	19° 52′ 30″,98

Druck von C. Giese in Pyritz.



Lieber und v. Lühmann. Trigonometrische Aufgaben.

Lith. Inst. von Bogdan Gisevius, Köpnicker Str. 57. Berlin.

Lieber, H.

Trigonometrische Aufgaben Herausgegeben von H. Lieber und F. v. Lühmann.
Mit einer Figurentafel

Berlin 1878